ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

FERRIOT

Géométrie de la règle. Note sur la théorie des transversales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 141-147
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__141_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1826-1827, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE.

Note sur la théorie des transversales ;

Par M. FERRIOT, Doyen de la Faculté des sciences de Grenoble.

I. SUR le plan d'un triangle quelconque ABC, soit menée une transversale arbitraire et indéfinie, coupant respectivement en A′, B′, C′ les directions des côtés BC, CA, AB. Ou bien cette transversale laissera d'un même côté les trois sommets du triangle, auquel cas les points A′, B′, C′ seront tous trois sur les prolongemens de ses côtés ; ou bien elle aura l'un de ses sommets d'un côté et les deux autres de l'autre, et alors il n'y aura qu'un des trois points A′, B′, C′ qui soit sur le prolongement d'un côté, tandis que les deux autres seront sur les côtés même ; d'où l'on voit que, dans tous les cas, le nombre de ceux de ces points qui seront sur les prolongemens des côtés sera toujours impair.

Par l'un quelconque C des sommets du triangle soit menée une parallèle au côté opposé, coupant la transversale en D ; on aura

$$CD : AC' :: CB' : AB' ,$$

$$BC' : CD :: BA' : CA' ,$$

d'où, en multipliant et simplifiant,

$$BC' : AC' :: CB' \times BA' : AB' \times CA' ;$$

et par suite

$$AB'\times BC'\times CA'=BA'\times CB'\times AC' . \qquad (1)$$

Réciproquement, si trois points A', B', C', sont situés sur les directions des trois côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC, de telle sorte que cette relation ait lieu, et si en outre le nombre de ceux d'entre eux qui sont sur les prolongemens des côtés est impair, ces trois points appartiendront nécessairement à une même droite.

En effet, il y aura toujours deux de ces points qui seront ou l'un et l'autre sur les côtés, même ou l'un et l'autre sur leurs prolongemens. Soient A', B' ces deux points; alors le point C' sera nécessairement sur le prolongement de AB; et, s'il n'est pas en ligne droite avec A' et B', il faudra qu'en joignant ces deux derniers points par une droite, cette droite coupe la direction de AB en quelque point C'' différent de C', mais qui devra se trouver, comme celui-ci, sur le prolongement de AB.

Les trois points A', B', C'' étant ainsi en ligne droite et se trouvant en nombre impair sur les prolongemens des côtés du triangle, on devra avoir, par ce qui précède,

$$AB'\times BC''\times CA'=BA'\times CB'\times AC'' ; \qquad (2)$$

d'où, en divisant (1) par (2),

$$\frac{BC'}{BC''}=\frac{AC'}{AC''} \qquad \text{ou} \qquad \frac{AC'}{BC'}=\frac{AC''}{BC''} ;$$

or, cette équation exprime que la droite AB est coupée harmoniquement aux points C', C''; donc, si elle pouvait avoir lieu, un des points C', C'' devrait, contrairement à l'hypothèse, se trouver entre les points A et B; donc le point C'' ne saurait être différent du point C'; donc la droite menée par les deux points

A′ et B′ doit aussi passer par le point C′ ; donc enfin ces trois points doivent appartenir à une même droite (*).

Si par le point C′ on mène une nouvelle transversale, coupant respectivement en A″, B″ les directions des côtés CB, CA, on aura pareillement

---

(*) On peut déduire de là une démonstration fort simple de la propriété de l'hexagone inscrit au cercle, démonstration dont l'idée nous a été suggérée par la lecture du mémoire de M. Sturm dont une partie a déjà paru dans le présent recueil.

Soient a, a', b, b', c, c' les sommets consécutifs de cet hexagone. Soient

A′ le point de concours des côtés opposés aa' et $b'c$,

B′ le point de concours des côtés opposés bb' et $c'a$,

C′ le point de concours des côtés opposés cc' et $a'b$,

Soient en outre

A le point de concours des côtés bb' et cc',

B le point de concours des côtés cc' et aa',

C le point de concours des côtés aa' et bb'.

En se rappelant les propriétés des sécantes qui partent d'un même point, et considérant tour-à-tour ac', cb', ba' comme des transversales par rapport au triangle ABC, on aura

$$Ac\times Ac'=Ab\times Ab', \qquad AB'\times Ca\times Bc'=CB'\times Ba\times Ac',$$

$$Ba\times Ba'=Bc\times Bc', \qquad Bc'\times Ab\times Ca'=Ac'\times Cb\times Ba',$$

$$Cb\times Cb'=Ca\times Ca', \qquad CA'\times Bc\times Ab'=BA'\times Ac\times Cb';$$

équations qui, multipliées entre elles, donneront, en réduisant,

$$AB''\times BC'\times CA''=BA''\times CB''\times AC' \;; \qquad (3)$$

d'où, en divisant (1) par (3),

$$\frac{AB'}{AB''}\times\frac{CA'}{CA''}=\frac{BA'}{BA''}\times\frac{CB'}{CB''} \;;$$

c'est-à-dire,

$$\frac{CA'}{CA''}:\frac{CB'}{CB''}::\frac{BA'}{BA''}:\frac{AB'}{AB''} \;; \qquad (4)$$

et il est aisé de voir que réciproquement, si cette proportion a lieu, les deux transversales $A'B'$, $A''B''$ iront concourir en un point de la direction de AB, si du moins elles ne lui sont pas parallèles.

II. Par un quelconque P des points du plan d'un triangle ABC, et par chacun de ses sommets, soient menées les droites AP, BP, CP, rencontrant respectivement les directions des côtés opposés en A', B', C'. Si le point P est intérieur au triangle, les trois points A', B', C' seront sur ses côtés même; tandis que si, au contraire, il lui est extérieur, deux d'entre eux seront sur les prolongemens des côtés; tellement que, dans tous les cas, le nombre de ceux

---

$$AB'\times BC'\times CA'=BA'\times CB'\times AC' \;;$$

ce qui prouve que les trois points A', B', C' sont en ligne droite.

Voilà donc le beau théorème de Pascal démontré fort simplement pour le cercle; et on en peut aisément conclure le théorème analogue de M. Brianchon, par la théorie des pôles, susceptible aussi, pour le cercle, d'une exposition fort élémentaire. Ces deux théorèmes, si féconds en belles conséquences, peuvent donc figurer, pour ainsi dire dès l'entrée, dans les élémens de géométrie où on finira sans doute tôt ou tard par les introduire, au lieu de les reléguer, comme on l'a fait jusqu'ici, dans des traités speciaux.

J. D. G.

d'entre eux qui seront situés sur les côtés même, sera toujours impair.

Par l'un quelconque C des sommets du triangle soit menée au côté opposé une parallèle, coupée respectivement en D et E, par les directions de AA' et BB' ; on aura

$$AB':CB'::AB:CE\ ,$$

$$BC':AC'::CE:CD\ ,$$

$$AB:CD::BA':CA'\ ;$$

d'où, en multipliant et simplifiant,

$$AB'\times BC':CB'\times AC'::BA':CA'\ ;$$

et par suite

$$AB'\times BC'\times CA'=BA'\times CB'\times AC'\ . \qquad (1)$$

Réciproquement, si trois points A', B', C', sont situées, sur les directions des trois côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC, de telle sorte que cette relation ait lieu, et si le nombre de ceux d'entre eux qui sont situés sur les côtés même du triangle est impair, les droites AA', BB', CC' concourront toutes trois en un même point P.

En effet, il y aura toujours deux de ces trois points qui seront ou l'un et l'autre sur les côtés même, ou l'un et l'autre sur leurs prolongemens. Soient A', B' ces deux points, soit P l'intersection de AA' et BB'; et admettons que la droite CP coupe la direction de AB en quelque point C'' différent de C'; il faudra nécessairement que les points C' et C'' soient tous deux sur le côté AB lui-même.

Mais alors AA', BB', CC'' concourant en un même point P, on devra avoir, par ce qui précède,

$$AB' \times BC'' \times CA' = BA' \times CB' \times AC'' ; \qquad (2)$$

d'où en divisant (1) par (2),

$$\frac{BC'}{BC''} = \frac{AC'}{AC''}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{AC'}{BC'} = \frac{AC''}{BC''} ;$$

or, cette équation exprime que la droite AB est coupée harmoniquement aux points C' et C'' ; donc, si elle pouvait avoir lieu, les points C', C'' ne pourraient, suivant l'hypothèse, être situés tous deux entre les points A et B ; donc le point C'' ne saurait être différent du point C' ; donc la droite menée du point C au point d'intersection de AA' et BB' coupe AB au point C' ; donc enfin, les trois droites AA', BB', CC' se coupent au même point (*).

Par un autre point P' de la direction de CC', soient menées deux nouvelles droites AP', BP', coupant respectivement CB et CA en A'', B'' ; nous aurons semblablement

$$AB'' \times BC' \times CA'' = BA'' \times CB'' \times AC' ; \qquad (3)$$

d'où en divisant (1) par (3),

$$\frac{AB'}{AB''} \times \frac{CA'}{CA''} = \frac{BA'}{BA''} \times \frac{CB'}{CB''} ;$$

c'est-à-dire,

$$\frac{CA'}{CA''} : \frac{CB'}{CB''} :: \frac{BA'}{BA''} : \frac{AB'}{AB''} ; \qquad (4)$$

(*) Il serait curieux d'examiner si de là on ne pourrait pas tirer une démonstration directe de la propriété de l'hexagone circonscrit au cercle analogue à celle que nous avons donnée, dans la note précédente, pour l'hexagone inscrit.

J. D. G.

et il est aisé de voir que réciproquement, si cette proportion a lieu, les points P, P' seront en ligne droite avec le point C.

III. On voit que, lorsque sur les directions BC, CA, AB des côtés d'un triangle ABC, on prend trois points A', B', C' tels que

$$AB' \times BC' \times CA' = BA' \times CB' \times AC' ,$$

ou bien ces trois points sont en ligne droite, ou bien les trois droites AA', BB', CC' concourent en un même point; et cela, suivant que ceux de ces points qui sont sur les côtés même du triangle sont en nombre pair ou en nombre impair.

Mais, lorsque quatre points A', A'', B', B'' pris, les deux premiers sur la direction du côté BC et les deux autres sur la direction du côté AC d'un triangle ABC, sont tels qu'on a la proportion

$$\frac{CA'}{CA''} : \frac{CB'}{CB''} :: \frac{BA'}{BA''} : \frac{AB'}{AB''} ,$$

il arrive à la fois que le point de concours de $A'B'$ et $A''B''$ est sur la direction du côté AB; et que les points d'intersection de AA' et BB', AA'' et BB'' sont en ligne droite avec le sommet C; ce qui donne cet élégant théorème :

Si trois droites issues d'un même point P coupent les côtés d'un angle dont le sommet est S, savoir l'un en A, A', A'' et l'autre en B, B', B''; et si C, C', C'' sont les intersections respectives de $A'B''$ et $B'A''$, $A''B$ et $B''A$, AB' et BA'; ces trois points C, C', C'' appartiendront à une même droite contenant le sommet S de l'angle; et réciproquement, si ces trois points appartiennent à une même droite contenant le point S, les droites AB, $A'B'$, $A''B''$ concourront toutes trois en un même point P (*).

(*) De là, par la théorie des polaires réciproques, on onclura cet autre théorème :