ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Géométrie élémentaire. Sur le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 148-152
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__148_0>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Sur le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre ;

Par M. GERGONNE.

A la page 192 du VI.e volume du présent recueil, nous avons démontré, d'après M. Schawab, cet élégant théorème :

THÉORÈME. Si l'on forme une suite dont les deux premiers termes soient zéro *et* un, *et dont chacun des autres soit alternativement la demi-somme et la racine quarrée du produit des deux qui le précèdent immédiatement*; *les termes de cette suite convergeront sans cesse vers le rayon du cercle dont la circonférence est* quatre (*).

Si à trois points d'une même droite P on mène des deux extrémités d'une autre droite S, savoir, de l'une, des droites A, A′, A″ et de l'autre, des droites B, B′, B″, et si C, C′, C″ sont respectivement les droites qui joignent l'intersection de A′ et B″ à celle de A″ et B′, l'intersection de A″ et B à celle de A et B″, et enfin l'intersection de A et B′ à celle de A′ et B, ces trois droites C, C′, C″ concourront en un même point de S, et réciproquement, si ces trois droites concourent en un même point de S, les points de concours de A et B, A′ et B′, A″ et B″ appartiendront tous trois à une même droite P.

J. D. G.

(*) M. Ampère nous a communiqué, il y a quelque temps, un théorème duquel celui-là peut facilement être déduit, et dont il déclare être depuis long-temps en possession.

Ce théorème, dont la démonstration est très-élémentaire, fournit déjà, tel qu'il vient d'être annoncé, un procédé tellement brief pour le calcul du nombre ϖ qu'on ne saurait désormais raisonnablement se refuser à l'introduire dans les traités de géométrie. C'est un exemple qui a été donné récemment par M. Vincent, professeur à Reims, et qui sera sans doute imité par d'autres géomètres.

Mais l'application du théorème de M. Schawab à la recherche du nombre ϖ est susceptible de diverses abréviations très-notables, qui paraissent avoir échappé à l'inventeur, et que nous avons fait connaître à l'endroit cité. On pourrait seulement nous reprocher d'avoir justifié ces simplifications par des procédés ou trop peu élégans ou trop peu géométriques; et c'est ce qui nous détermine à revenir de nouveau ici sur ce sujet.

D'abord, puisque les termes de la suite convergent vers une limite commune, ils tendent conséquemment à devenir égaux; et, comme on ne les calcule que par approximation, ils deviennent bientôt égaux en effet. Dès lors l'opération est terminée, et on peut regarder le dernier d'entre eux comme exprimant, dans les limites de l'approximation adoptée, le rayon du cercle dont la circonférence est quatre.

Mais, long-temps avant que ces termes soient devenus tout-à-fait égaux, on doit rencontrer deux termes consécutifs qui se ressemblent dans plus de la moitié de leurs chiffres de gauche, et il est clair qu'à plus forte raison, il en sera de même de tous ceux qui les suivront; or, une fois parvenu à ce point, on pourra, dans les limites de l'approximation adoptée, substituer de simples demi-sommes aux racines quarrées de produits, ce qui permettra de poursuivre le calcul de la suite par un procédé tout-à-fait simple et uniforme.

Comme on doit calculer tous les termes avec un même nombre de chiffres décimaux, on peut, pour prouver cette assertion, faire abstraction de la virgule. Tout se réduit alors à prouver que, si deux nombres entiers, d'un même nombre de chiffres, se ressemblent dans plus de la moitié de leurs chiffres de gauche, leur demi-somme n'excèdera pas d'une demi-unité la racine quarrée de leur produit.

Soient, en effet, a et b ces deux nombres ; d'après l'hypothèse, le nombre des chiffres de leur différence $a-b$ sera moindre que la moitié du nombre des chiffres de chacun d'eux, et, à plus forte raison, moindre que le nombre des chiffres de leur somme $a+b$ et, à plus forte raison encore, moindre que la moitié du nombre des chiffres de cette somme augmentée de $2\sqrt{ab}$ ou $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$; et, comme le nombre des chiffres de $(a-b)^2$ est, au plus, double du nombre des chiffres de $a-b$, on aura

$$(a-b)^2<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2, \quad \text{ou bien} \quad a-b<\sqrt{a}+\sqrt{b} ;$$

mais $a-b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$; donc

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}<1 , \quad \text{ou bien} \quad (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<1$$

c'est-à-dire,

$$a+b-2\sqrt{ab}<1 , \quad \text{ou bien} \quad \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{1}{2}$$

comme nous l'avions annoncé.

Soient a et b les deux termes à partir desquels on peut continuer la suite en prenant simplement chaque terme égal à la demi-somme des deux qui le précèdent immédiatement, et soient c, d, e, ... ceux qui suivent ces deux-là. Si l'on suppose que a et b soient les deux bases d'un trapèze, c sera la parallèle équidistante de a et b, d la parallèle équidistante de b et c, e la parallèle équidistante de c et d, et ainsi de suite. La limite vers laquelle convergeront les termes de la suite ne sera donc autre chose que la limite vers laquelle convergeront ces parallèles successives.

Concevons qu'on leur mène une perpendiculaire commune, coupée respectivement en A, B, C, D, E, ... par a, b, c, d, e, ... ; C sera le milieu de AB, D celui de BC, E celui de CD, et ainsi de suite ; la parallèle limite sera donc celle qui passera par le point limite des points A, B, C, D, E, ...

Soit construit arbitrairement un triangle tel que le point A soit un de ses sommets et le point B le milieu du côté opposé ; soient construits une suite d'autres triangles tels que les sommets de chacun soient les milieux des côtés de celui qui le précède immédiatement, à partir de celui qui aura été construit sur AB, il est aisé de voir que les milieux des côtés de ces triangles parallèles au côté du premier dont B est le milieu ne seront autre chose que nos points C, D, E, ... Il n'est pas moins évident que le triangle limite, qui se réduira à un point, ne sera autre chose que le centre commun de gravité des aires de tous ces triangles, lequel sera situé aux deux tiers de la longueur AB, à partir de A ; donc aussi le point limite des points A, B, C, D, E, ..., déterminés comme il a été dit ci-dessus, sera situé aux deux tiers de AB à partir de A ; et par conséquent la limite des parallèles c, d, e, ... aux bases a et b de notre trapèze, déterminées comme il a été dit ci-dessus, sera une parallèle à ces bases deux fois plus distante de a que de b.

Soit x la longueur de cette parallèle, et soit y la longueur de la parallèle également distante de x et de a ; on aura

$$2x=b+y\ ,\qquad 2y=x+a\ ,$$

d'où, en éliminant y,

$$x=\frac{a+2b}{3}\ .$$

Ainsi a et b étant les deux premiers termes de la suite qui se ressemblent dans plus de moitié de leurs chiffres de gauche, la limite vers laquelle convergeront sans cesse les termes de cette suite sera donc $\frac{a+2b}{3}$. Telle sera donc aussi la longueur du rayon d'un cercle ayant une circonférence égale à *quatre*, du moins dans la limite de l'approximation à laquelle on se sera arrêtée. Le diamètre de ce cercle sera donc

$$\frac{2(a+2b)}{3},$$

et on aura conséquemment

$$\varpi=4\times\frac{3}{2(a+2b)}=\frac{6}{a+2b}:$$

Le calcul du nombre ϖ peut donc être ainsi renfermé dans le simple énoncé que voici :

THÉORÈME. Soient posés zéro *et* un *pour les deux premiers termes d'une suite ; soit continué cette suite, en faisant alternativement chacun de ses termes égal à la demi-somme et à la racine quarrée du produit des deux termes qui le précèdent immédiatement, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à deux termes consécutifs qui se ressemblent dans plus de la moitié de leurs chiffres de gauche. Divisant alors* six *par le premier de ces termes augmenté du double de l'autre, on obtiendra pour quotient le rapport de la circonférence d'un cerle à son diamètre.*