ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

PONCELET

Philosophie mathématique. Analyse d'un mémoire présenté à l'académie royale des sciences

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 265-272

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__265_0>

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Analyse d'un mémoire présenté à l'Académie royale des Sciences ;

Par M. PONCELET.

(Extrait d'une lettre de l'Auteur au Rédacteur des *Annales.*)

. . . .

Vous désirez, Monsieur, que je vous donne quelques détails relativement au dernier mémoire que j'ai présenté à l'Académie des sciences, et sur lequel, dites-vous, M. Arago a piqué votre curiosité sans la satisfaire. Je vais essayer de vous donner une idée des recherches qui font le sujet de ce mémoire, autant du moins que les bornes d'une lettre peuvent le permettre.

Le but que je me suis principalement proposé, et que je désirerais avoir atteint, est de rendre plus évidente encore, s'il est possible, cette sorte de *dualité* de la géométrie que vous avez vous-même mise en avant et développée d'une manière très-philosophique à la page 209 de votre XVI.e volume. J'avais déjà avancé et prouvé, ce me semble, par un nombre suffisant d'exemples, soit dans vos *Annales*, soit dans mon *Traité des propriétés projectives des figures*, qu'il n'existe, pour ainsi dire, aucune relation descriptive et suffisamment générale d'une figure donnée, sur un plan ou dans l'espace, qui n'ait son analogue, ou plutôt sa réciproque dans une autre figure, tout aussi générale que la première, et cela en vertu même de la théorie des *polaires réciproques ;* mais je n'avais fait qu'indiquer, à la hâte, les principes de cette théorie, pour le cas de l'espace, et surtout j'avais totalement négligé ce qui concerne les relations métriques d'angles et de distances, sur lesquelles d'ailleurs il n'existe absolument rien nulle part. Cette nouvelle extension étant indispensable à l'objet des recherches que j'ai depuis long-temps entreprises, sur les propriétés des lignes et surfaces d'un ordre quelconque, j'ai jugé à propos d'en faire le sujet d'un mémoire spécial qui, avec celui où j'ai traité des *Centres de moyennes harmoniques* (*), servirait d'introduction à mes recherches subséquentes.

Le but principal que je me propose, dans ce mémoire, c'est d'examiner quelle espèce de modification éprouvent une figure donnée et les relations qui lui appartiennent, lorsque l'on passe à celle qui en est la polaire réciproque, et *vice versâ*, et de réduire, en quelque sorte, à un pur mécanisme, à une simple substitution de noms et de lettres, écrites à la place les unes des autres, la traduction de toutes les affections, de toutes les propriétés tant soit peu générales qui appartiennent à une figure donnée et à sa réciproque ; enfin de montrer comment on peut, au simple énoncé d'une proposition qui se rapporte soit aux relations projectives, en général, soit aux relations d'angles des figures situées dans un plan ou dans l'espace, comment on peut, dis-je, obtenir sur-le-champ et sans recourir à aucun calcul ou raisonnement, une, deux ou trois autres propositions, tout-à-fait distinctes de la première et néanmoins tout aussi générales.

Ce mémoire est divisé en quatre parties. Dans la première, j'expose la théorie des polaires réciproques, pour le cas du plan ; je

(*) Voy. la pag. 349 du précédent volume.

J. D. G.

reviens ainsi, mais avec plus d'extension, sur les principes que j'avais déjà mis en avant ailleurs; en insistant plus particulièrement sur les relations de réciprocité qui concernent les figures polygonales et les lignes courbes. La discussion des affections qui surviennent dans le cours d'une ligne quelconque et qui constituent ce que l'on nomme les *points singuliers*, met en état d'assigner le véritable degré des polaires réciproques des courbes données, dans chaque cas particulier.

La seconde partie du mémoire est relative aux figures dans l'espace. J'y établis les relations de réciprocité qui existent entre les polygones rectilignes gauches et les polyèdres indéfinis et entre les polyèdres définis ordinaires qui sont polaires les uns des autres, par rapport à une surface quelconque du second ordre. Je montre ainsi l'emploi de ce principe pour la démonstration des propriétés les plus générales des polyèdres (*). Ces notions préliminaires me conduisent directement, par l'application de la loi de continuité, aux relations de réciprocité entre les courbes à double courbure et les surfaces développables, ainsi qu'entre les surfaces courbes de nature quelconque; en un mot, je généralise ici, pour le cas de l'espace, tous les principes de la première partie, relatifs aux figures comprises dans un seul plan; ce qui permet de traduire, sur-le-champ, toute relation descriptive donnée en une autre essentiellement distincte, pourvu toutefois qu'il ne s'agisse que de relations et de figures *projectives*. On peut même, à l'aide de ce principe, transporter à l'espace toute relation pareille qui n'aurait été établie que pour les figures comprises dans un seul plan. En les appliquant, en particulier, aux lignes du second ordre, ils conduisent sur les surfaces du même ordre, à un grand nombre de

(*) Ce sont ces relations que nous avons tenté de mettre en évidence à la page 157 de notre XV.e volume.

J. D. G.

nouveaux théorèmes, dont quelques-uns ont été indiqués dans le supplément du *Traité des propriétés projectives* (n.^{os} 592 et 610). Par exemple, j'ai fait voir (n.^{o} 636) comment les nombreuses propriétés des systèmes de sphères qui, par leur généralité, appartiennent à la classe de celles qui nous occupent, comment, dis-je, ces nombreuses propriétés pouvaient s'étendre immédiatement aux systèmes de surfaces quelconques du second ordre qui ont un plan de section commune, réelle ou idéale; or, de là on est conduit, par les principes de la théorie des polaires réciproques, aux propriétés générales qui appartiennent aux systèmes de surfaces du second ordre inscrites à un même cône, ou à deux cônes, ou même à une autre surface quelconque du même ordre.

Pour ne pas rester dans des généralités trop vagues, j'ai rapporté, dans mon mémoire, quelques-unes des propriétés des surfaces du second ordre qui ont huit points communs ou la même courbe d'intersection, et j'en ai déduit, sans discussion, les propriétés réciproques des surfaces du second ordre qui ont huit plans tangens communs ou qui sont inscrites à une même surface développable. Il en résulte, par exemple, que *les centres de toutes ces surfaces sont situés sur une même ligne droite*, *dans l'un et dans l'autre système.* Je montre pareillement comment on peut passer directement des propriétés qui appartiennent à la courbe d'intersection de deux surfaces quelconques du second ordre et qui ont été démontrées n.^{o} 611 et suivans de l'ouvrage cité, à celles qui concernent la surface développable circonscrite à deux surfaces du second ordre également quelconques. Cette développable n'est autre chose, comme l'on sait, que celle qui sert de limite à l'ombre et à la pénombre de l'une des surfaces du second ordre, lorsque l'autre est supposée lumineuse; or je démontre 1.^{o} *qu'elle est du quatrième ordre; que ses nappes portent généralement quatre lignes de striction, qui sont toutes planes et du second ordre;* 3.^{o} *que les plans de ces quatre courbes forment, par leurs rencontres mutuelles, un tétraèdre dont chaque sommet est respectivement, et pour chacune* *des surfaces du second ordre proposées, le pôle de la face opposée; 4.° enfin, que ces mêmes quatre sommets du tétraèdre sont aussi ceux des quatre surfaces coniques du second ordre qui contiennent les courbes d'intersection des deux surfaces que l'on considère.* Ces considérations conduisent d'ailleurs à une solution géométrique très-simple du problème intéressant et proposé quelquefois à l'école polytechnique, où il s'agit de construire la courbe de séparation d'ombre et de lumières, pour le cas d'une surface quelconque du second ordre, éclairée par une sphère lumineuse, ou même par une autre surface quelconque du même ordre.

Jusqu'à présent, il n'a encore été question que des relations descriptives des figures. Dans la troisième partie du mémoire, j'examine les moyens de traduire, à l'aide de la théorie des polaires réciproques, les relations d'angles en d'autres relations pareilles. Il serait trop long d'indiquer ici, même sommairement, l'esprit de la méthode que j'emploie. Je me contenterai, comme précédemment, de citer quelques-unes des conséquences des principes théoriques. Par exemple, je prouve de suite que les théorèmes des n.os 452, 481, 487 du *Traité des propriétés projectives* sont les réciproques de ceux qui ont été démontrés aux n.os 482 et 488. Je montre pareillement comment on peut traduire la construction des lignes du second ordre, au moyen d'angles constans, donnée par Newton, et en général toutes celles de la *Géométrie organique* de Maclaurin, en d'autres absolument analogues, quoique néanmoins bien différentes. Pour le cas de l'espace, je fais voir que les propriétés de la *pyramide supplémentaire* sont des conséquences immédiates de la théorie des polaires réciproques. En appliquant les principes de cette même théorie au théorème de Monge, démontré par M. Poisson à la page 240 du tome I.er de la *Correspondance sur l'école polytechnique*, lequel consiste en ce que *le lieu du sommet d'un angle trièdre trirectangle mobile, dont les faces sont constamment tangentes à une même surface du second ordre, est une surface sphérique qui lui est concentrique*, on conclut, par exemple, que *si un tel angle se meut autour d'un point quelconque de l'espace, pris pour sommet invariable, les plans qui renferment constamment trois des intersections de ses arêtes, avec une surface donnée du second ordre, demeurent perpétuellement tangens à une surface de révolution du même ordre, qui a pour foyer général le sommet fixe de l'angle mobile et qui se réduit à un point, quand ce sommet est sur la surface directrice*, comme l'a démontré M. Frégier (*Annales*, tom. VI, pag. 231 et suiv.), pour le cas particulier, qui répond d'ailleurs à celui du théorème de Monge, dans lequel la surface enveloppe de l'angle trièdre est un des *paraboloïdes*; la sphère décrite par le sommet de l'angle mobile se réduisant alors à un plan. On peut faire subir une transformation analogue aux théorèmes de MM. Hachette et Binet (*Correspondance* tom. II, pag. 71), relatifs aux angles droits dièdres qui s'appuyent sur deux droites données dans l'espace, et en général à toutes les propositions analogues concernant les angles, ce qui permet, dès à présent d'en doubler le nombre. On remarquera d'ailleurs que nos principes s'appliquent au cas où les angles sont variables ou donnés par leurs lignes trigonométriques.

Enfin, je crois devoir encore signaler l'application que j'ai faite de la théorie des polaires réciproques aux propriétés des lignes du second ordre ou des surfaces de révolution du même ordre, qui ont un *foyer commun* ou sont *confocales*. J'établis, sans discussion, d'une part, que les propriétés descriptives, et de l'autre, que les propriétés angulaires d'un tel système sont réciproques de celles qui appartiennent à un système de cercles quelconques, tracés sur un même plan, ou de sphères également quelconques, situées arbitrairement dans l'espace. Si maintenant on joint à ces propositions générales celles que j'ai déduites des principes posés dans le *Traité des propriétés projectives*, section IV, chapitre I.er, et qui consistent en ce qu'un système de lignes ou de surfaces du second ordre qui ont un foyer commun, peut être considéré comme la *perspective plane* ou *en relief* les unes des autres, et si, en outre, on substitue à quelqu'une de ces lignes ou surfaces un cercle ou une sphère, il en résultera une multitude de propositions et de rapprochemens très-curieux relativement au foyer commun des lignes et surfaces du second ordre, dont quelques-uns ont servi à M. Dupin, dans ses *Applications de géométrie*, pour établir sa théorie des faisceaux lumineux, réfléchis à leur rencontre avec une surface quelconque.

La quatrième et dernière partie du mémoire est relative aux principes à l'aide desquels on peut traduire une relation métrique donnée, de la nature de celles que j'ai considérées dans le *Traité des propriétés projectives*, en une ou en deux autres, qui appartiennent à la figure réciproque de la proposée. Cette dernière partie du mémoire offre donc le moyen de convertir, sur-le-champ, toutes les propriétés métriques de la *Théorie des transversales* en d'autres tout-à-fait distinctes. Cette traduction s'opère d'ailleurs d'une manière très-facile, par une simple substitution de lettres et de mots, mis à la place les uns des autres.

Par exemple, on sait que, si une ligne du second ordre est coupée par les directions des côtés d'un triangle quelconque ABC, en nommant R, R′ ses intersections avec AB, P, P′ ses intersections avec BC et enfin Q, Q′ ses intersections avec CA, on a

$$AR.AR'.BP.BP'.CQ.CQ'=BR.BR'.CP.CP'.AQ.AQ' ;$$

or, si l'on applique à cette propriété les principes du mémoire, on arrive à cet autre énoncé :

Si, des sommets d'un triangle ABC, *situé sur le plan d'une ligne du second ordre, on mène à la courbe trois couples de tangentes, puisqu'ayant coupé, par une droite arbitraire, le système de ces six tangentes et des trois côtés du triangle, on désigne par* a, b, c *les intersections respectives de la transversale avec les directions des côtés opposés aux angles* A, B, C*; et en outre par* p, p′, q, q′, r, r′ *ses intersections avec les couples de tangentes* *respectivement issues de* A, B; C; *on aura, entre les divers segmens formés sur la transversale, la nouvelle relation :*

$$ar.ar'.bp.bp'.cq.cq'=br.br'.cp.cp'.aq.aq',$$

analogue à la première, bien que très-différente dans le fond.

Les principes posés dans le mémoire permettent également de traduire la relation primitive en une autre relation entre les lignes trigonométriques des angles formés par les droites de la dérivée; enfin ils donnent des moyens pour traduire immédiatement cette même relation en d'autres qui appartiennent à des figures situées dans l'espace et dans lesquelles les angles dièdres remplaçent les angles plans. Le mémoire est terminé par quelques applications de la théorie des polaires réciproques aux propriétés métriques des courbes à double courbure et des surfaces géométriques quelconques, ainsi que par l'exposé de la notation très-simple à l'aide de laquelle on peut transformer toute propriété qui se rapporte à celles que j'ai nommées ailleurs *projectives*, en plusieurs autres très-différentes de la première et non moins générales. La conclusion de ce travail est donc que les principes qu'il contient mettent en état de doubler et de tripler même le nombre des propriétés dont il s'agit, ainsi que celui des propriétés qui concernent les angles des figures, ce qui comprend toutes celles de la *théorie des transversales*, de la *géométrie de la règle*, et une infinité d'autres plus générales encore.