ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Combinaisons. Recherche directe des formules de combinaisons nécessaires, pour le développement d'une puissance d'un binome

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 356-360
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__356_1>

COMBINAISONS.

Recherche directe des formules de combinaisons nécessaires, pour le développement d'une puissance d'un binome,

Par M. GERGONNE.

RIEN ne serait mieux sans doute que de consacrer à la théorie des permutations et combinaisons, dans les traités élémentaires d'algèbre, un article à part d'une étendue proportionnée à l'importance de cette théorie, et dans lequel on pourrait traiter beaucoup d'autres questions que celles qui sont strictement nécessaires pour le développement des puissances d'un binôme. Toutefois, comme on peut fort bien ne vouloir établir que ces dernières seulement, je vais présenter ici un mode de raisonnement qui y conduit directement et qui me paraît assez simple. Il en existe beaucoup d'autres sans doute, et j'en ai moi-même donné de diverses sortes dans le présent recueil; mais la théorie des combinaisons étant une théorie très-délicate et assez difficile à bien saisir par les commençans, il est commode de la présenter sous diverses formes, afin de la rendre plus facilement accessible aux diverses tournures d'esprit que souvent un même raisonnement ne frappe pas d'une manière uniforme.

PROBLÈME. Parmi des choses en nombre m, *toutes différentes les unes des autres, de combien de manières en peut-on choisir un nombre* n ?

Solution. D'abord, si l'on ne veut choisir qu'une seule chose, on le pourra évidemment d'autant de manières qu'il y a de choses ; c'est-à-dire de m manières. Ecrivons $\frac{m}{1}$.

Si l'on veut choisir deux choses, le choix de la première étant fait, on pourra évidemment choisir la seconde de $m-1$ manières ; de sorte que, si l'on choisissait, tour-à-tour, chacune des m choses pour la première, le nombre des combinaisons deux à deux seraient $m(m-1)$. Mais il est clair qu'en procédant ainsi, chaque combinaison se trouverait répétée deux fois ; car, en supposant que les choses combinées fussent des lettres, la combinaison ab, par exemple, proviendrait également de la combinaison de a avec b et de celle de b avec a. Donc, le nombre des combinaisons possibles de m choses deux à deux est simplement $\frac{m(m-1)}{2}$. Ecrivons $\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}$.

Si l'on demande combien, parmi ces diverses combinaisons deux à deux, il s'en trouve qui ne renferment pas une certaine lettre, a par exemple, il est manifeste qu'il s'y en trouvera autant qu'on pourra faire de combinaisons deux à deux avec les $m-1$ lettres restantes. On aura donc la réponse à cette question, en changeant m en $m-1$, dans la formule que nous venons d'obtenir, ce qui donnera $\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}$.

Passons aux combinaisons trois à trois. Une lettre quelconque étant choisie pour première, on pourra la combiner avec toutes les combinaisons deux à deux où elle n'entre pas, lesquelles, comme nous venons de le voir, sont au nomdre de $\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}$. Si l'on en fait de même tour-à-tour, pour chacune des m lettres, on obtiendra un nombre de combinaisons de trois lettres exprimées par $m.\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}$. Mais il est aisé de voir que chaque combinaison y sera repétée trois fois; puisque, par exemple, la combinaison *abc* aura été produite par la combinaison de *a* avec *bc*, par celle de *b* avec *ac* et par celle de *c* avec *ab*; donc le nombre des manières différentes de choisir trois choses parmi des choses en nombre m, toutes différentes les unes des autres, est seulement $\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}$.

Rien ne s'oppose à ce qu'on poursuive ces raisonnemens aussi loin qu'on voudra; et si l'on se bornait à se laisser guider par l'analogie, les résultats $\frac{m}{1}$, $\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}$, $\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}$, déjà obtenus feraient assez connaître que le nombre des combinaisons possibles et distinctes n à n de m choses, toutes différentes les unes des autres, doit être exprimé par

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdots\frac{m-n+1}{n}.$$

Mais, afin qu'il n'y ait point d'induction dans tout ceci, admettons que cette loi hypothétique ait été vérifiée pour les combinaisons de m choses $n-1$ à $n-1$, et que conséquemment on ait trouvé, pour ce nombre de combinaisons,

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\frac{m-n+2}{n-1},$$

pour savoir combien, parmi ces combinaisons, il y en a qui ne renferment pas une certaine lettre, *a* par exemple; il faudra, comme ci-dessus, changer, dans cette formule, m en $m-1$; ce qui donnera

$$\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}\cdots\cdots\frac{m-n+1}{n-1}. \qquad (A)$$

Qu'il soit question présentement d'opérer des combinaisons n à n, en adoptant une lettre quelconque pour première lettre, on pourra la combiner avec toutes les combinaisons de $n-1$ lettres qui ne la contiennent pas; ce qui en produira un nombre (A). Si l'on en fait de même, tour-à-tour, pour chacune des m lettres, on obtiendra un nombre total de combinaisons égal à m fois (A); mais il est clair que, de cette sorte, chaque combinaison aura été répétée n fois; car, par exemple, la combinaison $abc.....gh$ aura été obtenue en combinant

a avec $bc........gh$,

b avec $ac........gh$,

c avec $ab........gh$,

. . . . ,

g avec $abc.......h$,

h avec $abc........g$;

donc, pour obtenir le nombre des combinaisons réellement différentes de nos m lettres n à n, il faudra multiplier seulement le nombre (A) par $\frac{m}{n}$, ce qui donnera

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdots\frac{m-n+1}{n},$$

comme nous l'avions d'abord soupçonné. Il demeure donc établi, par ce qui précède, que, si la loi d'abord entrevue se soutient pour les combinaisons de $n-1$ lettres, elle aura lieu également pour les combinaisons de n lettres ; d'où il suit que cette loi est générale.