ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

Questions résolues. Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 200 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 360-366
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__360_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 200 du présent volume ;

Par M. Bobillier, professeur de mathématiques à l'Ecole royale des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

Avant de nous occuper de la démonstration des propriétés des surfaces du second ordre qui doivent faire le sujet principal de cet article, arrêtons-nous un moment à la démonstration de la propriété analogue des lignes du second ordre.

Soit

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0\ , \qquad (1)$$

l'équation d'une surface quelconque du second ordre, rapportée à des axes quelconques. On sait que l'équation de sa tangente, par un quelconque (x',y') des points de son périmètre est

$$(Ax'+Cy'+D)x+(By'+Cx'+E)y+(Dx'+Ey'+F)=0\ . \qquad (2)$$

Si donc, supposant le point (x',y') indéterminé sur la courbe, on veut que cette tangente passe par l'origine, il faudra poser

$$Dx'+Ey'+F=0\ ; \qquad (3)$$

équation qui, combinée avec

$$Ax'^2+By'^2+2Cx'y'+2Dx'+2Ey'+F=0\ , \qquad (4)$$

qui exprime que le point (x', y') est sur cette courbe, fera connaître les coordonnées des points de contact des deux tangentes issues de l'origine. Mais, au lieu de recourir au calcul, il reviendra au même de construire les lignes exprimées par les équations (3) et (4), lesquelles donneront par leurs intersections les points cherchés. La première de ces lignes n'est autre chose que la courbe dont il s'agit ; d'où il suit que l'autre, qui est une ligne droite, est la droite qui joint les points de contact cherchés, c'est-à-dire, la corde de contact de l'angle circonscrit qui a son sommet à l'origine, ou, en d'autres termes, la polaire de l'origine. Il est donc établi, par ce qui précède, que la polaire de l'origine, par rapport à la courbe (1), a pour équation

$$Dx+Ey+F=0\ . \qquad (5)$$

Supposons présentement que cette courbe soit indéterminée, mais assujettie néanmoins à passer par quatre points donnés ; on exprimera cette condition par *quatre* équations linéaires entre les *six* coefficiens A, B, C, D, E, F, qui entreront dans tous leurs termes, et desquelles conséquemment on pourra obtenir les valeurs de *quatre* d'entre eux, en fonction linéaire des *deux* restans ; qui entreront aussi dans tous les termes de ces fonctions. En choisissant, par exemple D et E pour ces deux-là, on aura

$$F=\alpha D+\beta E\ ,$$

α et β étant des quantités constantes, fonctions des coordonnées des quatre points donnés. En substituant cette valeur dans l'équation (5) de la polaire de l'origine, cette équation deviendra

$$Dx+Ey+D\alpha+E\beta=0\,,$$

ou bien

$$D(x+\alpha)+E(y+\beta)=0\,.$$

Or, on satisfait à cette équation, quels que soient D et E, en posant

$$x=-\alpha\,,\qquad y=-\beta\,;$$

ce sont donc là les coordonnées d'un point fixe par lequel passe constamment la polaire de l'origine, quelle que soit d'ailleurs celle des courbes, passant par les quatre points dont il s'agit, à laquelle cette polaire est relative. En observant donc qu'ici l'origine des coordonnées est un quelconque des points du plan de ces courbes, on obtiendra ce théorème :

THÉORÈME I. Les polaires d'un même point d'un plan, relatives à toutes les lignes du second ordre qui passent par les quatre mêmes points de ce plan, concourent toutes en un même point.

Et de là, par la théorie des polaires réciproques,

THÉORÈME II. Les pôles d'une même droite tracée sur un plan, relatifs à toutes les lignes du second ordre qui touchent les quatre mêmes droites tracées sur ce plan, appartiennent tous à une même droite.

Si l'on suppose que la première droite s'éloigne à l'infini, son pôle relatif à chacune des courbes dont il s'agit, ne sera autre chose que le centre de cette courbe ; ce qui donnera ce troisième théorème ;

THÉORÈME III. Les centres de toutes les lignes du second ordre qui touchent les quatre mêmes droites appartiennent tous à une même droite (*).

(*) Il a été démontré (*Annales*, tom. XII, pag. 109 et tom. XIV, pag.

Soit une surface du second ordre rapportée à deux axes quelconques et donnée par l'équation

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy+2Gx+2Hy+2Kz+L=0 \; . \quad (1)$$

On sait que son plan tangent, par un quelconque (x', y', z') de ses points, a pour équation

$$\left.\begin{array}{l}(Ax'+Ez'+Fy'+G)x\\+(By'+Fx'+Dz'+H)y\\+(Cz'+Dy'+Ex'+K)z\end{array}\right\}+(Gx'+Hy'+Kz'+L)=0 \; . \quad (2)$$

Si donc, en supposant le point (x', y', z') indéterminé sur la surface, on veut que ce plan tangent passe par l'origine, il faudra écrire

$$Gx'+Hy'+Kz'+L=0 \; , \qquad (3)$$

équation qui, combinée avec l'équation

$$Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2Dy'z'+2Ez'x'+2Fx'y'+2Gx'+2Hy'+2Kz'+L=0 \; , \; (4)$$

qui exprime que le point (x', y', z') est sur la surface, fera connaître tous les points de contact, en nombre infini, pour lesquels cette condition se trouve remplie. Ces points seront également les points de contact de la surface (1) avec la surface conique circonscrite qui aurait son sommet à l'origine; or, comme leurs coordonnées devront toutes satisfaire à l'équation (3) qui n'est que du premier degré, il s'ensuit qu'ils sont tous dans le plan exprimé par cette équation. Il est donc établi par là que la courbe de contact

---

309) que cette droite, passe par les milieux des trois diagonales du quadrilatère complet formé par les quatre tangentes.

d'une surface du second ordre avec la surface conique circonscrite est une courbe plane ; c'est le plan de cette courbe que l'on appelle le plan polaire du sommet du cône ; et l'on voit d'après cela que l'équation du plan polaire de l'origine est

$$Gx+Hy+Kz+L=0 \ . \qquad (5)$$

Supposons présentement que la surface du second ordre dont il s'agit soit indéterminée, mais assujettie néanmoins à passer par sept points donnés dans l'espace. On exprimera cette condition par *sept* équations linéaires, entre les *dix* coefficiens A, B, C, D, E, F, G, H, K, L, qui entreront dans tous leurs termes et desquelles conséquemment on pourra obtenir les valeurs de *sept* d'entre elles, en fonction linéaire des *trois* restantes, qui entreront aussi dans tous les termes de ces fonctions. En choisissant, par exemple G, H, K pour ces trois-là, on aura

$$L=\alpha G+\beta H+\gamma K \ ,$$

α, β, γ étant des quantités constantes, fonctions des coordonnées des sept points donnés. En substituant cette valeur dans l'équation (5) de la polaire de l'origine, cette équation deviendra

$$Gx+Hy+Kz+G\alpha+H\beta+K\gamma=0 \ ,$$

ou bien

$$G(x+\alpha)+H(y+\beta)+K(z+\gamma)=0 \ .$$

Or, on satisfait à cette équation, quels que soient G, H, K, en posant

$$x=-\alpha \ , \quad y=-\beta \ , \quad z=-\gamma \ ;$$

ce sont donc là les coordonnées d'un point fixe, par lequel passent constamment les plans polaires de l'origine, quelle que soit d'ailleurs celle des surfaces courbes passant par les sept points donnés à laquelle ce plan polaire est relatif. En observant donc qu'ici l'origine est un quelconque des points de l'espace, on obtiendra ce théorème.

THÉORÈME IV. Les plans polaires d'un même point de l'espace, relatifs à toutes les surfaces du second ordre qui passent par les sept mêmes points, concourent tous en un même point de l'espace.

Et de là, par la théorie des polaires réciproques.

THÉORÈME V. Les pôles d'un même plan, relatifs à toutes les surfaces du second ordre qui touchent les sept mêmes plans, sont tous compris dans un même plan.

Si l'on suppose que le premier des plans dont il s'agit soit infiniment éloigné, son pôle, relatif à chacune des surfaces dont il s'agit, ne sera autre chose que le centre de cette surface ; ce qui donnera ce troisième théorème.

THÉORÈME VI. Les centres des surfaces du second ordre qui touchent à la fois les sept mêmes plans donnés sont tous compris dans un même plan (*).

Soient tant de surfaces du second ordre qu'on voudra passant toutes par les huit mêmes points ; parce qu'elles passent toutes par les sept premiers, les plans polaires d'un même point de l'espace relatifs à toutes ces surfaces devront (*Théorème IV*) tous concourir en un même point ; et, parce qu'elles passent toutes par les sept derniers, ces mêmes plans polaires devront tous concourir en un autre point ; donc ils devront tous se couper suivant la droite qui joindra ces deux points ; on a donc ce théorème.

THÉORÈME VII. Les plans polaires d'un même point de l'espace, relatifs à toutes les surfaces du seconde ordre qui passent

(*) Il serait intéressant de savoir comment ce plan est situé par rapport aux sept plans dont il s'agit.

J. D. G.

par les huit mêmes points, se coupent tous suivant une même droite.

Et de là, par la théorie des polaires réciproques

THÉORÈME VIII. *Les pôles d'un même plan, relatifs à toutes les surfaces du second ordre qui touchent les huit mêmes plans, appartiennent tous à une même droite.*

Si l'on suppose que le premier des plans dont il s'agit soit infiniment éloigné, ses pôles relatifs aux diverses surfaces dont il s'agit ne seront autre chose que leurs centres; et le théorème se changera dans celui qui suit :

THÉORÈME IX. *Les centres de toutes les surfaces du second ordre qui touchent à la fois les huit mêmes plans appartiennent tous à une même droite* (*).

(*) Il serait également curieux de savoir comment cette droite est située par rapport aux huit plans.

J. D. G.