ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

PLUKER

Géométrie analytique. Recherche graphique du cercle osculateur, pour les lignes du second ordre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 69-72
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__69_0>

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Recherche graphique du cercle osculateur, pour les lignes du second ordre;

Par M. PLUKER, docteur de l'Université de Bonn.

SOIT rapportée une ligne du second ordre à l'un quelconque de ses points, pris pour origine des coordonnées, et à sa tangente en ce point prise pour axe des y, l'axe des x étant dirigé suivant la normale; l'équation de la courbe sera de la forme

$$y^2+2axy+bx^2+2cx=0\ , \qquad (1)$$

où a, b, c seront des quantités déterminées. Il faut en effet, d'après la situation donnée de la courbe qu'en posant $x=0$, on ait deux valeurs nulles pour y.

Toutes les autres lignes du second ordre touchant celle-là à l'origine seront comprises dans l'équation générale.

$$y^2+2Axy+Bx^2+2Cx=0\ , \qquad (2)$$

où A, B, C seront des quantités indéterminées.

Deux lignes du second ordre pouvant, en général, se couper en quatre points, et un point de contact étant la réunion en un seul de deux points d'intersection; il s'ensuit que les courbes (1) et (2), outre leur point commun à l'origine, doivent en avoir encore deux autres, réels ou imaginaires. Cherchons l'équation de la droite qui joint ces deux derniers.

Il est connu que, si l'on combine ensemble, d'une manière quelconque, les équations de deux lieux géométriques, l'équation résultante sera celle d'un troisième lieu géométrique, contenant les points communs aux deux premiers; donc, en particulier, la différence des équations (1) et (2) appartient à un lieu géométrique qui contient le point de contact qu'ont les deux courbes à l'origine et les deux autres points où elles se coupent; or, cette différence est

$$x\{2(A-a)y+(B-b)x+2(C-c)\}=0\ ,$$

qui exprime le système de deux droites, dont l'une est l'axe des y qui contient uniquement le point de contact, donc l'autre

$$2(A-a)y+(B-b)x+2(C-c)=0\ , \qquad (3)$$

est la droite qui joint les deux points d'intersection des deux courbes. Si ces points d'intersection sont imaginaires, la droite (3) deviendra ce que M. Poncelet a appelé *corde idéale*, mais on pourra toujours la construire.

Si l'on profite de l'indétermination des constantes A, B, C, pour faire en sorte que la droite (3) passe par l'origine; ce qui se réduit à poser $C=c$, l'un des deux points d'intersection viendra se joindre au point de contact; de sorte que les deux courbes auront alors, à l'origine, un contact du second ordre. Ainsi, toutes les courbes comprises dans l'équation générale

$$y^2+2Axy+Bx^2+2cx=0\ , \qquad (4)$$

dans laquelle A et B sont indéterminés, ont à l'origine, avec la courbe (1), un contact du second ordre. Les deux courbes ont en outre une intersection qui, dans ce cas, est nécessairement réelle.

Si l'on profitait de l'indétermination des constantes A, B, C, pour faire coïncider la droite (3) avec l'axe des y, ce qui se réduirait à poser, à la fois, $A=a$ et $C=c$, les points d'intersection se confondraient alors tous deux avec l'origine ; de sorte que les deux courbes auraient en ce point un contact du troisième ordre. L'équation

$$y^2+2axy+Bx^2+2cx=0\ , \qquad (5)$$

où B est indéterminé, est donc l'équation commune à toutes les lignes du second ordre qui ont avec la courbe (1), à l'origine, un contact du troisième ordre. Dans ce cas les deux courbes ne peuvent plus se couper autre part.

Quelles que soient la nature de la courbe (1) et sa situation par rapport aux axes, la courbe (4) peut fort bien devenir un cercle, puisqu'il ne s'agit pour cela que de supposer à la fois $A=0$ et $B=1$. Ainsi, *il y a, pour chaque point d'une ligne du second ordre, un cercle qui a avec la courbe, en ce point, un contact du second ordre.* C'est ce cercle qu'on appelle le *cercle osculateur* de la courbe; il la coupe, en outre, en un autre point.

Mais l'équation (5) ne saurait devenir celle d'un cercle, qu'autant qu'on aurait déjà, dans l'équation (1), $a=0$; c'est-à-dire, qu'autant que l'origine des coordonnées serait un des sommets de la courbe; c'est-à-dire, qu'*un cercle ne saurait avoir avec une ligne du second ordre, en l'un de ses points, un contact du troisième ordre qu'autant que ce point est un des sommets de la courbe.*

La courbe (2) variant sans cesse, la corde commune (3) avec la courbe (1) demeurera constamment parallèle à elle-même si le rapport $\frac{B-b}{A-a}$ demeure constant. Or, c'est ce qui arrivera, en particulier, si, A et B demeurant constans, on fait seulement varier C, dans l'équation (2) ; et cela quelles que soient d'ailleurs les valeurs constantes de A et B; donc, il en sera ainsi, en particulier, lorsqu'on aura $A=0$ et $B=1$, c'est-à-dire, lorsque l'équation (2) exprimera un cercle; ainsi, *tant de cercles qu'on voudra, tangens en un même point à une ligne du second ordre, la coupent de manière que les cordes qui joignent les points d'intersec-*

tion sont toutes parallèles. Celui de ces cercles pour lequel la corde passe par l'origine est, d'après ce qui précède, le cercle osculateur de la courbe, en ce point.

De là résulte une construction facile, pour obtenir le centre de courbure, et conséquemment le cercle osculateur d'une ligne du second ordre, en l'un de ses points. Par ce point soit menée à la courbe une normale sur laquelle soit choisi un point tel qu'en décrivant, de ce point comme centre, un cercle passant par le point donné, ce cercle coupe la courbe en deux autres points. Soient menées à la courbe une corde par ces deux points, et par le point donné une nouvelle corde, parallèle à celle-là. La perpendiculaire sur le milieu de cette dernière corde coupera la normale au centre de courbure cherchée.

Cette construction revient à une autre construction déjà connue; mais il était difficile d'y parvenir par une voie plus simple.