ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

ROCHE

Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la page 28 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 111-113

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__111_0>

Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la page 28 du présent volume ;

Par MM. Roche, professeur de mathématiques, de physique et de chimie à l'Ecole d'artillerie de la marine; Reynard, répétiteur de mathématiques à l'Ecole d'artillerie de la Garde Royale, et Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

THÉORÈME. *Trois droites respectivement parallèles aux trois côtés d'un triangle, menées par un même point pris arbitrairement dans l'intérieur de ce triangle, le partagent en trois parallélogrammes et en trois triangles ; tels que le produit des aires des trois parallélogrammes est égal à huit fois le produit des aires des trois triangles.*

Démontration. Soit $AA'A''$ (fig. 1) un triangle quelconque, et soit P un point pris arbitrairement dans son intérieur. Soient menées, par ce point P,

$B'C''$, parallèle à $A'A''$, et se terminant à AA' et AA'',

$B''C$, parallèle à $A''A$, et se terminant à $A'A''$ et $A'A$,

BC', parallèle à AA', et se terminant à $A''A$ et $A''A'$.

On aura, par des théorèmes connus,

$$\textit{Parall.}\ PA=PB.PC.\textit{Sin}.A\ ,$$

$$\textit{Parall.}\ PA'=PB'.PC'.\textit{Sin}.A'\ ,$$

$$Parall.\ PA''=PB''.PC''.Sin.A''\ ,$$

$$PB''.PC'.Sin.A=2Triang.B''PC'\ ,$$

$$PB.PC''.Sin.A'=2Triang.BPC''\ ,$$

$$PB'.PC.Sin.A''=2Triang.B'PC\ ;$$

d'où on conclura, en multipliant et en supprimant les facteurs communs aux deux membres de l'équation produit

$$Parall.PA\times Parall.PA'\times Parall.PA''=8Tri.B''PC'\times Tri.BPC''\times Tri.B'PC\ ;$$

comme on l'avait annoncé.

On peut également parvenir au but sans rien emprunter de la trigonométrie. On démontre en effet, dans les élémens, que, si un angle d'un triangle est égal à un angle d'un autre triangle, les aires de ces deux triangles sont entre elles comme les produits des côtés qui comprennent les angles égaux; d'où il suit que, si un parallélogramme et un triangle ont un angle égal, l'aire du parallélogramme sera à l'aire du triangle comme le double du produit des côtés du parallélogramme qui comprennent l'angle dont il s'agit, est au produit des côtés qui comprennent son égal dans le triangle.

En conséquence, on aura

$$\frac{Parall.PA}{Tri.B''PC'}=2.\frac{PB.PC}{PB''.PC'}\ ,$$

$$\frac{Parall.PA'}{Tri.BPC''}=2.\frac{PB'.PC'}{PB.PC''}\ ,$$

$$\frac{Parall.PA''}{Tri.B'PC}=2.\frac{PB''.PC''}{PB'.PC}\ ;$$

d'où, en multipliant et simplifiant,

$$\frac{\textit{Parall}.\mathrm{PA}\times\textit{Parall}.\mathrm{PA'}\times\textit{Parall}.\mathrm{PA''}}{\textit{Tri}.\mathrm{B''PC'}\times\textit{Tri}.\mathrm{BPC''}\times\textit{Tri}.\mathrm{B'PC}}=8\,;$$

équation qui revient à la précédente (*).

(*) Plusieurs élèves du collége royal de Montpellier, auxquels le théorème a été proposé, l'ont démontré de l'une et de l'autre manière. Il est dû à l'élève Ch. Sicard, du collége de S.te-Barbe, à Paris, qui a démontré en outre que $\mathrm{PB.PB'.PB''}=\mathrm{PC.PC'.PC''}$.

J. D. G