ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

VALLÈS

# Démonstration de ce théorème et de quelques autres, ainsi que de leurs analogues relatifs au tétraèdre

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 18 (1827-1828), p. 113-123
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__113_1>

## *Démonstration de ce théorème et de quelques autres, ainsi que de leurs analogues relatifs au tétraèdre;*

Par M. VALLÈS, élève ingénieur des ponts et chaussées.

THÉORÈME I. *Les parallèles à deux des côtés d'un triangle, menées par un quelconque des points du troisième, partagent ce triangle en deux autres* T′ *et* T″ *et un parallélogramme* P, *tels qu'on a*

$$P^2-4T'T''=0\ .$$

*Démonstration.* Soit SS′S″ ( fig. 2 ) le triangle dont il s'agit. Soit C un point pris arbitrairement sur le côté S′S″ de ce triangle, par lequel on a mené les parallèles CA′, CA″ à ses deux autres côtés, se terminant à ces mêmes côtés. Ces parallèles diviseront le triangle en deux autres CA′S′, CA″S″, que nous représenterons respectivement par $T'$, $T''$ et en un parallélogramme CS que nous représenterons par $P$. Posons en outre $CS'=a'$, $CS''=a''$.

En considérant CA′ comme la base commune de $P$ et $T'$ leurs hauteurs seront proportionnelles à A′S et A′S′, d'où il résulte qu'on aura

$$\frac{P}{T'}=2.\frac{A'S}{A'S'}=2\frac{CS''}{CS'}=2\frac{a''}{a'}.$$

Par une semblable raison, on aura

$$\frac{P}{T''}=2\frac{a'}{a};$$

d'où en multipliant, simplifiant, chassant le dénominateur et transposant

$$P^2-4T'T''=0;$$

comme nous l'avions annoncé.

*THÉORÈME II. Les parallèles aux trois côtés d'un triangle, conduites par un même point pris arbitrairement dans son intérieur, partagent le triangle en trois parallélogrammes* P, P′, P‴ *et en trois triangles respectivement opposés* T, T′, T″, *tels qu'on a*

$$P^2=4T'T'', \qquad P'^2=4T''T, \qquad P''=4TT'.$$

*Démonstration.* C'est une conséquence toute naturelle de ce que les systèmes de surfaces $T'$, $T''$ et $P$, $T''$, $T$ et $P'$, $T$, $T'$ et $P''$ ( fig. 3 ) se trouvent exactement dans le cas des trois surfaces du *Théorème I.*

Si, entre ces trois équations, on élimine tout à tour deux des trois quantités $T$, $T'$, $T''$, il viendra

$$2TP=P'P'', \quad 2T'P'=P''P, \quad 2T''P''=PP'.$$

En divisant ces dernières deux à deux, on parvient à cette double équation

$$TP^2=T'P'^2=T''P''^2 .$$

Enfin en extrayant la racine quarrée du produit des équations primitives, on parvient à l'équation

$$PP'P''=8TT'T'' ,$$

qui est précisément celle qui était proposée à démontrer.

*THÉORÈME III. Les plans parallèles à deux des faces d'un tétraèdre, conduits par un quelconque des points de l'arête suivant laquelle se coupent ses deux autres faces, partagent le tétraèdre en deux autres* T′, T″ *et en un hexaèdre heptagone* Q, *tronc de prisme quadrangulaire, dont une des arêtes latérales est nulle, tels que*

$$Q=3(\sqrt[3]{T'}+\sqrt[3]{T''})\sqrt[3]{T'T''} .$$

*Démonstration.* Soit SS′S″S‴ ( fig. 4 ) le tétraèdre dont il s'agit. Par un point C, pris arbitrairement sur l'arête S′S″, soient conduits les plans A′CB′, A″CB″, respectivement parallèles aux faces SS″S‴, SS′S‴, qui contiennent l'arête SS‴, opposée à S′S″. Ces plans diviseront le tétraèdre donné en deux autres S′A′CB′, S″A″CB″, que nous représenterons respectivement par $T'$, $T''$, et un corps hexaèdre heptagone, terminé par les deux parallélogrammes CS, CS‴, les deux triangles A′CB′, A″CB″ et les deux trapèzes SA′B′S‴, SA″B″S‴; lequel corps que nous représenterons par $Q$, n'est autre qu'un tronc de prisme quadrangulaire, dont une des arêtes latérales est nulle.

Soit conduit, par CB′ et CA″, un plan coupant en D l'arête SS″; ce plan divisera le corps $Q$ en deux prismes triangulaires, l'un que nous représenterons par $P$, ayant pour ses deux bases A′CB′

et SA$''$D ; et l'autre, que nous représenterons par $P'''$, ayant pour ses deux bases A$''$CB$''$ et DB$'$S$'''$. Posons enfin CS$'=a'$, CS$''=a''$. Nous aurons d'abord

$$P+P'''=Q\,. \qquad (1)$$

En considérant le triangle A$'$CB$'$ comme la base commune du prisme triangulaire $P$ et du tétraèdre $T'$, leurs hauteurs seront proportionnelles à A$'$S et A$'$S$'$; de sorte qu'on aura

$$\frac{P}{T'}=3.\frac{A'S}{A'S'}=3.\frac{CS''}{CS'}=3\frac{a''}{a'}\,. \qquad (2)$$

Pour une semblable raison, on aura aussi

$$\frac{P'''}{T''}=3\frac{a'}{a''}\,. \qquad (3)$$

En considérant A$'$S$'$B$'$ comme la base du tétraèdre T$'$, ce tétraèdre aura même hauteur que le prisme $P'''$; de sorte que $P'''$ sera à T$'$ comme le triple de l'aire du triangle B$'$S$'''$D est à l'aire du triangle S$'$B$'$A$'$. Mais, parce que ces triangles sont semblables, leurs aires sont proportionnelles aux quarrés de leurs côtés homologues ; de sorte qu'on aura

$$\frac{P'''}{T'}=3\frac{\overline{B'S'''}^2}{\overline{S'B'}^2}=3\frac{\overline{CS''}^2}{\overline{CS'}^2}=3\frac{a''^2}{a'^2}\,. \qquad (4)$$

Pour une semblable raison, on aura aussi

$$\frac{P}{T''}=3\frac{a'^2}{a''^2}\,. \qquad (5)$$

Prenant, tour à tour, la somme des équations (2) et (4), et celle des équations (3) et (5), en ayant égard à l'équation (1), il viendra

$$\frac{Q}{T'}=3\,\frac{a''}{a'}\left(1+\frac{a''}{a'}\right),$$

$$\frac{Q}{T''}=3\,\frac{a'}{a''}\left(1+\frac{a'}{a''}\right);$$

ou, en chassant les dénominateurs, transposant et ordonnant

$$Qa'^2-3T'a'a''-3T'a''^2=0\,,$$

$$3T''a'^2+3T''a'a''-Qa''^2=0\,.$$

Prenant successivement la somme des produits de ces équations, d'abord par $3T''$ et $-Q$, puis par $Q$ et $-3T'$, en divisant le premier résultat par $a''$ et le second par $a'$, il viendra

$$3T''(Q+3T')a'=(Q^2-9T'T'')a''\,,$$

$$3T'(Q+3T'')a''=(Q^2-9T'T'')a'\,;$$

d'où, en multipliant membre à membre et divisant par $a'a''$,

$$(Q^2-9T'T'')^2=9T'T''(Q+3T')(Q+3T'')\,;$$

ou bien enfin, en développant, réduisant, transposant et ordonnant

$$Q^3-27T'T''Q-27T'T''(T'+T'')=0\,.$$

Or, cette équation a deux racines imaginaires qui ne sauraient convenir à la question qui nous occupe. En ne prenant donc que sa racine réelle, on aura simplement, comme l'annonce le théorème,

$$Q=3(\sqrt[3]{T'}+\sqrt[3]{T''})\sqrt[3]{T'T''}\ .$$

*THÉORÈME IV. Les plans conduits par un même point, pris arbitrairement dans l'intérieur de la base d'un tétraèdre, parallèlement à ses trois autres faces, partagent ce tétraèdre en trois autres tétraèdres* T′, T″, T‴, *trois hexaèdres heptagones, respectivement opposés* Q′, Q″, Q‴, *lesquels sont des troncs de prismes triangulaires, ayant une arête latérale nulle, et enfin un parallélipipède* P, *tels qu'on a*

$$1.^{\circ}\ \left\{\begin{array}{l} Q'=3(\sqrt[3]{T''}+\sqrt[3]{T'''})\sqrt[3]{T''T'''}\ , \\ Q''=3(\sqrt[3]{T'''}+\sqrt[3]{T'})\sqrt[3]{T'''T'}\ , \\ Q'''=3(\sqrt[3]{T'}+\sqrt[3]{T''})\sqrt[3]{T'T''}\ ; \end{array}\right.$$

$$2.^{\circ}\qquad P^3=216T'T''T'''\ .$$

*Démonstration*. Les trois premières équations résultant tout naturellement de ce que chacun des trois systèmes de corps T″, T‴ et Q′, T‴, T′ et Q″, T′, T″ et Q‴ se trouve dans le même cas que les trois corps du *théorème III;* la quatrième seule a besoin d'être démontrée.

Pour y parvenir, soit S′S″S‴ (fig. 5) la base du tétraèdre donné, et soit O le point pris arbitrairement dans son intérieur par lequel on a conduit des plans respectivement parallèles à ses trois autres faces; ces plans coupant le plan de la base suivant les droites

$A'B''$, parallèle à $S''S'$, se terminant à $S'''S''$ et $S'''S'$ ;

$A''B'''$, parallèle à $S'''S''$, se terminant à $S'S'''$ et $S'S''$ ;

$A'''B'$, parallèle à $S'S'''$, se terminant à $S''S'$ et $S''S'''$ .

Les triangles $A'OB'$, $A''OB''$, $A'''OB'''$ seront les bases de nos trois tétraèdres dont nous supposerons les sommets respectifs en $C'$, $C''$, $C'''$, et que nous représenterons respectivement par $T'$, $T''$, $T'''$. Alors $OC'$, $OC''$, $OC'''$ seront les trois arêtes d'un même angle du parallélipipède $P$; et cet angle sera évidemment égal à chacun des angles $C'$, $C''$, $C'''$ des tétraèdres $T'$, $T''$, $T'''$.

Mais, lorsqu'un parallélipipède et un tétraèdre ont un angle trièdre égal, le volume du parallélipipède est au volume du tétraèdre, comme six fois le produit des trois arêtes du parallélipipède qui comprennent l'angle dont il s'agit, est au produit des trois arêtes qui comprennent son égal dans le tétraèdre. En observant donc que le parallélipipède $P$ a une arête commune avec chacun des tétraèdres $T'$, $T''$, $T'''$, et que ces trois tétraèdres sont semblables, on aura

$$\frac{P}{T'}=6.\frac{OC''.OC'''}{C'A'.C'B'}=6.\frac{OB''.OA'''}{OA'.OB'} ,$$

$$\frac{P}{T''}=6.\frac{OC'''.OC'}{C''A''.C''B''}=6.\frac{OB'''.OA'}{OA''.OB''} ,$$

$$\frac{P}{T'''}=6.\frac{OC'.OC''}{C'''A'''.C'''B'''}=6.\frac{OB'.OA''}{OA'''.OB'''} .$$

Mais, si l'on représente par $t'$, $t''$, $t'''$ les bases respectives des tétraèdres $T'$, $T''$, $T'''$, et par $p'$, $p''$, $p'''$ les parallélogrammes opposés OS′, OS″, OS‴, qui avec eux composent la base du tétraèdre proposé, on aura

$$\frac{p'}{t'}=2.\frac{OB''.OA''}{OA'.OB'},$$

$$\frac{p''}{t''}=2.\frac{OB'''.OA'}{OA''.OB''},$$

$$\frac{p'''}{t'''}=2.\frac{OB'.OA''}{OA'''.OB'''};$$

équations qui, comparées aux précédentes, les changent en celles-ci

$$\frac{P}{T'}=3\frac{p'}{t'},\quad \frac{P}{T''}=3\frac{p''}{t''},\quad \frac{P}{T'''}=3\frac{p'''}{t'''},$$

dont le produit est

$$\frac{P^3}{T'T''T'''}=27\frac{p'p''p'''}{t't''t'''}.$$

Mais, par le *théorème II*, on a

$$\frac{p'p''p'''}{t't''t'''}=8;$$

donc, en substituant et chassant le dénominateur,

$$P^3=216T'T''T''';$$

comme l'annonce le théorème.

De ces quatre équations on en peut déduire plusieurs autres ; et d'abord cette dernière donne

$$\sqrt[3]{T''T'''}=\frac{P}{6\sqrt[3]{T'}}\,,\quad \sqrt[3]{T'''T'}=\frac{P}{6\sqrt[3]{T''}}\,,\quad \sqrt[3]{T'T''}=\frac{P}{6\sqrt[3]{T'''}}\,.$$

Substituant ces valeurs dans les trois premières, et chassant les dénominateurs, il viendra

$$2Q'\sqrt[3]{T'}=P(\sqrt[3]{T''}+\sqrt[3]{T'''})\,,$$

$$2Q''\sqrt[3]{T''}=P(\sqrt[3]{T'''}+\sqrt[3]{T'})\,,$$

$$2Q'''\sqrt[3]{T'''}=P(\sqrt[3]{T'}+\sqrt[3]{T''})\,.$$

En éliminant entre ces équations deux quelconques des quantités $\sqrt[3]{T'}$, $\sqrt[3]{T''}$, $\sqrt[3]{T'''}$, la troisième disparaîtra d'elle-même et on aura

$$P^3+(Q'+Q''+Q''')P^2-Q'Q''Q'''=0\,.$$

*THÉORÈME V. Les plans conduits parallèlement aux faces d'un tetraèdre, par un même point pris arbitrairement dans son intérieur, partagent ce tétraèdre en quatorze parties dont quatre* P, P′, P″, P‴ *sont des parallélipipèdes ayant chacun un angle trièdre commun avec lui ; quatre autres* T, T′, T″, T‴ *sont des tétraèdres qui lui sont semblables, et qui sont respectivement opposés à ces parallélipipèdes ; enfin les six dernières que nous désignerons par* (pp′), (pp″), (p′p″), (pp‴), (p′p‴), (p″p‴), *suivant les parallélipipèdes entre lesquels elles se trouveront situées, sont des troncs de prismes quadrangulaires, ayant une arête la-*

*térale nulle ; et on a , entre ces quatorze parties , les dix relations suivantes :*

$$1.^{\circ}\left\{\begin{array}{ll}(pp')=3(\sqrt[3]{T''}+\sqrt[3]{T'''})\sqrt[3]{T''T'''}\,, & (p''p''')=3(\sqrt[3]{T}+\sqrt[3]{T'})\sqrt[3]{TT'}\,,\\ (pp'')=3(\sqrt[3]{T'}+\sqrt[3]{T'''})\sqrt[3]{T'T'''}\,, & (p'p''')=3(\sqrt[3]{T}+\sqrt[3]{T''})\sqrt[3]{TT''}\,,\\ (p'p'')=3(\sqrt[3]{T}+\sqrt[3]{T'''})\sqrt[3]{TT'''}\,, & (pp''')=3(\sqrt[3]{T'}+\sqrt[3]{T''})\sqrt[3]{T'T''}\,,\end{array}\right.$$

$$2.^{\circ}\left\{\begin{array}{l}P^3=216T'T''T'''\,,\\ P'^3=216T''T'''T\,,\\ P''^3=216T'''TT'\,;\\ P'''^3=216TT'T''\,.\end{array}\right.$$

*Démonstration.* Ces relations résultent tout naturellement de ce que les quatre systèmes de sept corps

$$P\,,\,T'\,,\,T''\,,\,T'''\,,\,(p'p'')\,,\,(p'p''')\,,\,(p''p''')\,,$$

$$P'\,,\,T''\,,\,T'''\,,\,T\,,\,(pp'')\,,\,(pp''')\,,\,(p''p''')\,,$$

$$P''\,,\,T'''\,,\,T\,,\,T'\,,\,(pp')\,,\,(pp''')\,,\,(p'p''')\,,$$

$$P'''\,,\,T\,,\,T'\,,\,T''\,,\,(pp')\,,\,(pp'')\,,\,(p'p'')\,,$$

se trouvent , les uns par rapport aux autres , dans le cas du *théorème IV*.

De ces relations on peut en déduire une multitude d'autres, parmi lesquelles nous nous contenterons de signaler les plus remarquables.

En extrayant la racine cubique du produit des quatre dernières, on obtient, sur-le-champ,

$$PP'P''P'''=1296TT'T''T'''\ .$$

Si, entre ces mêmes quatre dernières équations, on élimine tour à tour trois des quatre quantités $T$, $T'$, $T''$, $T'''$, on aura

$$6P^2T=P'P''P'''\ ,$$

$$6P'^2T'=P''P'''P\ ,$$

$$6P''^2T''=P'''PP'\ ,$$

$$6P'''^2T'''=PP'P''\ .$$

On tire encore de ces équations, en les multipliant par $T$, $T'$, $T''$, $T'''$, et remarquant qu'alors leurs seconds membres deviennent égaux,

$$P^3T=P'^3T'=P''^3T''=P'''^3T'''\ .$$