ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Géométrie de situation. Rectification de quelques théorèmes énoncés dans les Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 149-154
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__149_1>

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Rectification de quelques théorèmes énoncés dans les Annales ;

Par M. GERGONNE.

L'HABITUDE que l'on a contractée, depuis Descartes, de représenter les lignes et les surfaces courbes par des équations entre deux ou trois variables, a conduit tout naturellement à les classer d'après le *degré* plus ou moins élevé de ces équations que l'on a dit aussi être celui de ces lignes ou de ces surfaces ; degré qui demeure invariable, à quelque système d'axes d'ailleurs qu'on les rapporte.

Mais, dans la *géométrie de situation* où il n'y a ni axes ni coordonnées ni équations, cette classification ne saurait être employée ; et le mot *degré*, pris dans le sens qu'on y attache communément, y est un mot tout-à-fait vide de sens.

Toutefois, dans cette géométrie, on peut employer un mode de classification qui a un rapport très-intime avec celui-là, c'est celui qui consiste à classer les lignes et les surfaces courbes d'après le nombre plus ou moins grand des points communs qu'elles peuvent avoir avec une même droite.

Mais, dans la géométrie de situation, tout ce qui n'est pas symétrique de soi-même doit inévitablement être double ; et on ne saurait y introduire cette classification sans l'accompagner d'une autre qui en soit la correlative ; or, pour peu que l'on soit au courant de ce sujet, on apercevra aussitôt que cet autre système de classification devra consister à classer les courbes planes d'après le nombre plus ou moins grand des tangentes qu'il sera possible de leur mener de l'un quelconque des points de leur plan, et les surfaces courbes par le nombre plus ou moins grand des plans tangens qui pourront leur être conduits par une même droite. On pourra donc poser les propositions suivantes :

I. Les courbes planes peuvent être distribuées d'après le nombre plus ou moins grand des intersections qu'elles peuvent avoir avec une même droite.	I. Les courbes planes peuvent être distribuées d'après le nombre plus ou moins grand des tangentes qui peuvent leur être menées d'un même point de leur plan.
II. Les surfaces courbes peuvent être distribuées d'après le nombre plus ou moins grand des points où elles peuvent être percées par une même droite.	II Les surfaces courbes peuvent être distribuées d'après le nombre plus ou moins grand des plans tangens qui peuvent leur être menés par une même droite.

Il est manifeste en outre, que ces deux modes de distribution sont tels que toujours deux courbes ou surfaces polaires réciproques l'une de l'autre seront des courbes ou surfaces de même rang dans les deux séries.

Nous aurions présentement besoin de deux mots, l'un pour exprimer qu'une courbe est telle qu'une droite la coupe en m points, ou qu'une surface courbe est telle qu'une droite la perce en m points, et l'autre pour exprimer qu'une courbe est telle qu'on peut lui mener m tangentes par un même point de son plan, ou qu'une surface courbe est telle que, par une même droite, on peut lui mener m plans tangens; mais, pour ne point introduire ici des mots nouveaux pour lesquels la répugnance du public, bien qu'assez peu fondée peut-être, est néanmoins presque invincible, nous adopterons le mot *degré* pour le premier cas, et le mot *classe* pour le second; c'est-à-dire, que nous introduirons les définitions suivantes:

Définition I. Une courbe plane est dite du $m.^{ieme}$ degré, lorsqu'elle a avec une même droite m intersections réelles ou idéales.

Définition I. Une courbe plane est dite de $m.^{ieme}$ classe, lorsqu'on peut lui mener d'un même point de son plan m tangentes réelles ou idéales.

Définition II. Une surface courbe est dite du $m.^{ieme}$ degré, lorsqu'elle a avec une même droite m intersections réelles ou idéales.

Définition II. Une surface courbe est dite de $m.^{ieme}$ classe, lorsque par une même droite on peut lui mener m plans tangens réels ou idéaux (*).

Et de là résulteront immédiatement ces théorèmes :

I. Deux lignes des $m.^{ieme}$ et $n.^{ieme}$ degrés, tracées sur un même plan,

I. Deux lignes des $m.^{ieme}$ et $n.^{ieme}$ classes, tracées sur un même plan,

(*) J'écris *idéaux*, comme Berruyer a écrit *littéraux*, et Desfontaines *triviaux*. Je me range toujours du côté de l'uniformité, pour peu qu'elle ait des exemples en sa faveur.

ont, en général, mn points communs, réels ou idéaux.

II. Trois surfaces des $p.^{ieme}$, $q.^{ieme}$, $r.^{ieme}$ degrés ont, en général, pqr points d'intersection, réels ou idéaux.

ont, en général, mn tangentes communes, réelles ou idéales.

II. Trois surfaces des $p.^{ieme}$, $q.^{ieme}$, $r.^{ieme}$ classes ont, en général, pqr plans tangens communs, réels ou idéaux.

Voilà ce que nous aurions dû dire aux pag. 216 et 229 de notre XVII.^{e} volume; mais l'emploi du mot *ordre*, qui était tout-à-fait déplacé en cette rencontre, nous a induit en erreur, comme nous en avions déjà manifesté le pressentiment au haut de la pag. 252, et nous avons une sincère obligation à M. Poncelet dont les doutes, bien qu'assez vaguement exprimés, nous ont conduit à examiner de nouveau notre travail et à nous faire sentir la nécessité de le rectifier.

Toutefois, les rectifications à y introduire ne sont ni très-nombreuses ni très-difficiles. On conçoit d'abord que, dans toute l'étendue du mémoire, tout ce que renferment les colonnes de gauche est exact, puisque tout cela est déduit, indépendamment du principe de *dualité*, d'une analyse très-simple et très-rigoureuse. Il en sera de même aussi des propositions des colonnes de droite (et c'est le plus grand nombre) qui ne sont relatives qu'aux lignes et surfaces du second ordre seulement, puisque ces lignes et surfaces sont à la fois du *second degré* et de la *seconde classe*. Mais l'entière correction du mémoire, d'après les idées que nous venons d'ometttre peut être renfermée dans ce peu de mots: *Remplacer le mot* ordre *par le mot* degré *dans la colonne de gauche, et par le mot* classe, *dans la colonne de droite; et entendre ensuite ces deux derniers mots comme il a été expliqué plus haut.*

Il faudra aussi faire subir les mêmes modifications aux théorèmes démontrés par M. Bobillier, pag. 25 et 89 du présent volume. Mais, comme les derniers ne sont point disposés en colonnes, nous allons, par forme d'exemple et pour plus grande intelligence de la chose, les reproduire ici, tels qu'ils doivent être énoncés, suivant le langage que nous venons d'admettre, en les réduisant à quatre seulement.

THÉORÈME I. Si, de tant de points qu'on voudra, d'une droite tracée arbitrairement sur le plan d'une courbe du m.$^{\text{ieme}}$ *degré, on mène à cette courbe toutes les tangentes possibles, les courbes qui contiendront les points de contact des divers faisceaux de tangentes, lesquelles ne seront que du* $(m-1)^{\text{ieme}}$ *degré seulement, se couperont toutes aux* $(m-1)^2$ *mêmes points.*

THÉORÈME I. Si, par un même point pris arbitrairement sur le plan d'une courbe de m.$^{\text{ieme}}$ *classe, on mène à cette courbe tant de sécantes qu'on voudra, puis ensuite des tangentes, par ses points d'intersection avec chacune de ces sécantes, les courbes auxquelles seront circonscrites les tangentes des divers faisceaux, lesquelles ne seront que de* $(m-1)^{\text{ieme}}$ *classe seulement, seront toutes inscrites aux* $(m-1)^2$ *mêmes droites.*

THÉORÈME II. Si tant de points qu'on voudra d'un plan, situé d'une manière quelconque dans l'espace, sont des sommets de surfaces coniques circonscrites à une même surface du m.$^{\text{ieme}}$ *degré, les surfaces courbes qui contiendront les lignes de contact de ces diverses surfaces coniques, lesquelles ne seront que du* $(m-1)^{\text{ieme}}$ *degré seulement, se couperont toutes aux* $(m-1)^3$ *mêmes points. Si, de plus, les sommets des surfaces coniques sont tous situés sur une même droite,*

THÉORÈME II. Si, par un même point quelconque de l'espace, on conduit à une même surface de m.$^{\text{ieme}}$ *classe tant de plans sécans qu'on voudra et qu'ensuite on lui circonscrive des surfaces développables, suivant ses intersections avec ces différens plans, les surfaces courbes auxquelles ces diverses surfaces pourront être circonscrites, lesquelles ne seront que de* $(m-1)^{\text{ieme}}$ *classe seulement, auront toutes les* $(m-1)^3$ *mêmes plans tangens. Si, de plus, les plans sécans se coupent tous* *ces mêmes surfaces du* $(m-1)^{ieme}$ *dégré se couperont toutes, suivant une même courbe à double courbure.*

suivant une même droite, ces mêmes surfaces de $(m-1)^{ieme}$ *classe seront toutes circonscriptibles à une seule et même surface développable.*

Ces théorèmes de M. Bobillier qui comprennent, comme cas très-particuliers, la théorie des pôles, polaires, plans polaires et polaires conjuguées des lignes et surfaces du second ordre, sont, comme l'on voit, un fort beau supplément aux *lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres.*