ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

Questions résolues. Solution des deux problèmes de géométrie énoncés à la pag. 348 du précédent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 172-174
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__172_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux problèmes de géométrie énoncés à la pag. 348 du précédent volume ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

Problème I. Deux lignes du second ordre, tracées sur les deux faces d'un angle dièdre variable, de telle sorte que l'arête de cet angle en soit une corde commune, réelle ou idéale, déterminent, quelle que soit d'ailleurs l'ouverture de l'angle dièdre, deux surfaces coniques du second ordre, dont elles sont les intersections. On suppose que, l'une des faces de l'angle dièdre restant fixe, ainsi que son arête, son autre face tourne sur cette arête, comme sur une charnière, et on demande quelle ligne les sommets des deux surfaces coniques décriront dans l'espace ?

Solution. Soient A et B deux lignes du second ordre, situées dans un même plan, de manière à avoir une sécante commune S, réelle ou idéale. Si l'on inscrit à A un polygone quelconque P de m côtés, on pourra, comme l'on sait, en inscrire à B deux autres Q et Q$'$, aussi de m côtés, de telle sorte que les côtés et diagonales de Q et Q$'$ concourront avec leurs analogues de P sur la sécante commune S, et tels encore que les sommets correspondans se trouveront sur autant de rayons issus du céntre direct ou inverse d'homologie (*) ; de sorte que, si P et Q sont deux polygones directement homologues, relativement à la sécante S, P et Q′ seront deux polygones inversement homologues, par rapport à cette même sécante.

Cela posé, la courbe A et le polygone P restant fixes, faisons tourner la courbe B et les polygones Q et Q′ autour de la sécante S, et arrêtons cette figure dans une position quelconque ; les sommets homologues de P et Q se trouveront alors sur m droites qui concourront en un même point C, et ceux de P et Q′ sur m autres droites qui concourront en un même point C′. Or, si l'on imagine deux surfaces coniques ayant pour base commune la courbe A, et pour sommets les points C et C′, il est visible qu'en supposant $m>4$, la surface B se trouvera sur l'une et sur l'autre, et que par conséquent C et C′ seront précisément les sommets des deux surfaces coniques déterminées par A et B. Le problème se trouve donc ramené à celui de la pag. 335 du précédent volume, d'où il résulte que le lieu cherché est le système de deux circonférences dont les plans sont perpendiculaires à l'arête C, mais qui lui sont excentriques.

PROBLÈME II. Deux surfaces coniques du second ordre, qui ont un angle dièdre circonscrit commun, réel ou idéal, déterminent, quelle que soit la distance entre leurs sommets, sur l'arête de cet angle, deux lignes planes du second ordre qui en sont les intersections. On suppose que l'une des deux surfaces coniques, ainsi que l'angle dièdre circonscrit commun, restant fixes, l'autre surface conique se meut parallèlement à elle-même, de manière à être toujours circonscrite à l'angle dièdre, et on demande à quelles surfaces les plans des deux courbes d'intersection seront constamment tangens ?

(*) Voy., pour cette dénomination, le *Traité des propriétés projectives* de M. PONCELET.

Solution. Imaginons un paraboloïde elliptique P, ayant son axe dans l'arête de l'angle dièdre circonscrit aux deux surfaces coniques; soient C, C′ ces deux surfaces, S, S′ leurs sommets; les polaires de C, C′, par rapport à P, seront deux lignes du second ordre c, c', dont les plans, ayant pour pôles S, S′, seront perpendiculaires à l'axe de la surface directrice et par suite parallèles. Or, puisque les deux cônes C, C′ ont deux plans tangens communs, dont les pôles sont à l'infini, les courbes c, c' auront une sécante commune pareillement à l'infini; donc ces courbes seront semblables et semblablement disposées. Représentons par k et k' les sommets des deux cônes déterminés par c et c'; tout point commun à C et C′ aura pour plan polaire un plan tangent aux deux courbes c, c', et qui par conséquent passera par l'un des deux points k, k'. Supposons maintenant que le premier cône C restant fixe, ainsi que les deux plans tangens, le second cône C′ se transporte parallélement à lui-même, de telle sorte que son sommet S′ décrive l'axe de P; les pôles de ses plans tangens décriront autant de diamètres perpendiculaires au plan de la courbe c. D'un autre côté, ces points seront constamment dans un plan parallèle à ce dernier; donc la courbe c' est invariable et engendre une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe de P. Il est facile maintenant de reconnaître que les sommets k et k' décrivent des diamètres de P, passant par les centres de similitude des projections de c, c' sur un plan fixe quelconque, parallèle aux leurs. Or, ces lignes ont des polaires à l'infini, donc les plans des courbes d'intersection de C et C′ se meuvent parallélement à eux-mêmes. L'intersection de ces plans a pour polaire la droite kk', et, parce qu'elle passe toujours par le centre de c, il s'ensuit que cette intersection décrit un plan.