ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ROCHE

Arithmétique appliquée. Théorie élémentaire de la sommation des piles de boulets

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 19-25

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__19_0>

ARITHMÉTIQUE APPLIQUÉE.

Théorie élémentaire de la sommation des piles de boulets;

Par M. Roche, professeur de mathématiques, de physique et de chimie à l'école royale d'artillerie de la marine de Toulon.

On présente ordinairement la sommation des piles de boulets comme une application de la théorie des suites dont le terme général est une fonction rationnelle et entière de l'indice, et ce problème est très-propre, en effet, à faire comprendre l'utilité de cette théorie. Mais elle n'est guère accessible aux sous-officiers et soldats d'artillerie, dont l'instruction est généralement bornée à l'arithmétique et tout au plus à quelques notions très-élémentaires de géométrie; et pourtant le problème de la sommation des piles de boulets se présente continuellement à leurs recherches. On pourrait bien, à la vérité, se borner à leur faire apprendre les énoncés des règles pratiques et les exercer à en faire l'application; mais, outre qu'il est pénible, pour des êtres doués d'intelligence d'employer des procédés dont ils ne savent pas se rendre compte, il est souvent à craindre, dans ce cas, que, par l'effet d'un défaut d'exercice plus ou moins long, les préceptes venant à se brouiller, dans leur mémoire, ils n'en viennent à appliquer à un cas la règle qui convient à un autre. Ce danger est beaucoup moins à craindre lorsque celui qui opère sait se rendre compte à lui-même des motifs de ses procédés.

Nous croyons donc ne pas faire une chose dépourvue d'utilité, en essayant ici de ramener le problème de la sommation des diverses sortes de piles de boulets aux notions d'arithmétique les plus élémentaires. Nous emploîrons pour abréger les signes algébriques, mais on verra aisément que leur emploi n'est pas indispensable.

Avant de nous occuper de la sommation des piles de boulets, occupons-nous d'abord de la sommation des boulets, des faces qui les terminent. Ces faces peuvent être des rectangles, des quarrés, des trapèzes ou des triangles.

1. Si m et n sont les nombres de boulets de deux côtés d'une face rectangulaire, il est manifeste que le nombre des boulets de cette face sera mn; et il en serait encore de même si, par l'effet d'une construction vicieuse, le parallélogramme était obliquangle, au lieu d'être rectangle.

2. Si le rectangle devenait un quarré dont chaque côté fut formé par n boulets, le nombre des boulets de ce quarré serait donc n^2; et il en serait encore de même si, par l'effet d'une construction viciense, le quarré dégénerait en un rhombe.

3. Supposons qu'il en soit ainsi, et que la petite diagonale du rhombe soit égale à chacun de ses côtés, ce rhombe équivaudra alors à deux triangles équilatéraux ayant base commune; de sorte que, si l'on voulait en former deux triangles équilatéraux isolés l'un de l'autre, il faudrait introduire une nouvelle base de n boulets. Ainsi, pour former deux faces triangulaires ayant chacune des côtés de n boulets, il est nécessaire d'employer n^2+n ou $n(n+1)$ boulets; donc le nombre des boulets contenus dans une seule face triangulaire, dont les côtés contiennent n boulets, est $\frac{n(n+1)}{2}$.

4. Soit enfin une face figurée en trapèze; et soit n le nombre des boulets de l'un des côtés non parallèles et m le nombre de ceux de la petite base, comme il y a à sa suite, et parallèlement à sa direction, $n-1$ rangées de boulets, croissant constamment d'un bou-

let d'une rangée à l'autre, il s'ensuit que le nombre des boulets de la grande base du trapèze sera $m+n-1$.

Ce trapèze sera évidemment composé d'un parallélogramme ayant n boulets dans un sens et m dans l'autre, et d'un triangle ayant tous ses côtés de n boulets; ces deux figures ayant un côté commun de n boulets. Si on veut les isoler l'une de l'autre, il faudra introduire dans l'une les n boulets du côté commun enlevés par l'autre. Le nombre total des boulets du triangle et du parallélogramme sera ainsi (1) et (3) $\frac{n(n+1)}{2}+mn$; donc le nombre des boulets du trapèze est seulement $\frac{n(n+1)}{2}+mn-n=\frac{n(2m+n-1)}{2}$.

On pourrait encore considérer le trapèze comme la différence entre deux triangles, dont le plus grand aurait à tous ses côtés $m+n-1$ boulets, tandis que le côtés de l'autre n'en auraient seulement que $m-1$; on trouverait d'après cela (3), pour le nombre des boulets du trapèze, $\frac{(m+n-1)(m+n)}{2}-\frac{(m-1)m}{2}=\frac{n(2m+n-1)}{2}$, comme ci-dessus.

5. On peut résumer ces diverses formules dans ce principe unique : *Le nombre des boulets d'une face en trapèze, parallélogramme ou triangle s'obtient en multipliant un côté par la demi-somme des arêtes parallèles qui s'y terminent ;* pourvu que, dans l'application, on se rappelle que l'une des arêtes parallèles, pour la face triangulaire, n'a qu'un boulet seulement.

6. Passons au nombre des boulets des piles. On ne saurait former des piles en forme de parallélipipède rectangle qu'en les encaissant. Si les trois arêtes d'un même angle d'une telle pile étaient m, n, p, le nombre des boulets de la pile serait évidemment mnp ; et il en irait exactement de même si le parallélipipède était obliquangle.

7. Si le parallélipipède avait pour base un quarré ou un rhombe dont chaque côté fut de n boulets, et que ses arêtes se terminant

à cette base fussent de m boulets, le nombre total des boulets du parallélipipède serait alors mn^2, soit que ses arêtes latérales fussent perpendiculaires à cette base ou qu'elles lui fussent obliques.

8. Et si le parallélipipède se réduisait à un cube dont chaque arête contient n boulets, le nombre total des boulets du cube serait n^3; et il en irait encore ainsi, si la pile, au lieu d'être cubique était un parallélipipède obliquangle terminé par six rhombes.

9 Considérons de nouveau la pile qui a pour base un rhombe dont les côtés contiennent n boulets chacun et dont les arêtes latérales contiennent m boulets; cette pile contiendra (7) mn^2 boulets. Supposons que la petite diagonale du rhombe soit égale à ses côtés; le parallélipipède sera formé de deux prismes triangulaires, à base équilatérale, ayant une face rhombe commune qui contiendra mn boulets. Pour isoler ces deux piles l'une de l'autre, il deviendra nécessaire de rétablir pour l'une d'elles ces mn boulets enlevés par l'autre; les deux prismes triangulaires contiendront donc entre eux mn^2+mn ou $m\,n(n+1)$ boulets; d'où il suit que le nombre des boulets de chacun d'eux sera $m.\dfrac{n(n+1)}{2}$.

10. Dans le cas particulier où il y aurait, dans les arêtes latérales autant de boulets que dans les côtés de la base, le nombre des boulets de la pile prismatique triangulaire deviendrait $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$.

11. Supposons qu'il en soit ainsi; le prisme sera composé de trois tétraèdres tels que l'un d'entre eux aura une face commune avec chacun des deux autres et que toutes leurs arêtes auront n boulets. Si l'on veut isoler ces tétraèdres les uns des autres, il faudra retablir, pour deux d'entre eux, la face commune enlevée par le troisième, ce qui consommera (3) $n(n+1)$ nouveaux boulets; le nombre total des boulets des trois tétraèdres sera ainsi $\dfrac{n^2(n+1)}{2}+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{2}$, d'où il suit que le nombre des boulets de l'un d'eux ou de la pile tétraèdre, improprement appelée *pile triangulaire*, sera $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

12. Supposons que, par l'effet de la mauvaise conformation de cette pile, sa base soit un triangle rectangle isocèle, et que sa face adjacente à l'hypothénuse de cette base soit perpendiculaire à son plan. Si l'on construit deux pareilles piles, on pourra les réunir de manière à en former une pile pyramidale quadrangulaire, improprement appelée *pile quarrée*; mais il sera nécessaire pour cela d'enlever à l'une d'elles les $\frac{n(n+1)}{2}$ boulets de la face qui doit lui devenir commune avec l'autre. Le nombre des boulets de la pile quarrée sera donc ainsi $2.\frac{n(n+1)(n+2)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

13. Il ne sera pas difficile, d'après cela, d'obtenir le nombre des boulets de ce qu'on appelle *pile oblongue*, c'est-à-dire, d'une pile dont la base est un rectangle et qui se termine, à la partie supérieure, par une arête unique, parallèle aux longs côtés de sa base. Soient m le nombre des boulets de cette arête, et n le nombre de ceux de l'un des petits côtés de la base; il est aisé de voir (4) que le nombre des boulets des longs côtés de cette base sera $m-n+1$.

La pile pourra être considérée comme formée de deux autres, l'une quarrée ayant n boulets à ses arêtes et l'autre prismatique triangulaire ayant aussi n boulets aux côtés de ses bases et m à ses arêtes latérales; ces deux piles ayant une face triangulaire commune. Si l'on veut les isoler l'une de l'autre, il faudra rétablir, pour l'une d'elles, la face commune enlevée par l'autre, et on aura alors pour le nombre total des boulets des deux piles (9) et (11) $m.\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; d'où il suit que le nombre des boulets de la pile oblongue sera seulement $m.\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{6}$.

En rapprochant toutes ces formules on s'assurera que, *pour avoir le nombre des boulets d'une pile triangulaire quarrée ou oblongue* *il faut constamment multiplier le nombre des boulets de l'une des faces triangulaires par le tiers de la somme des trois arêtes parallèles qui s'y terminent*, en observant qu'une de ces arêtes, pour la pile quarrée, et deux, pour la pile triangulaire se réduisent à un boulet.

Une pile peut n'être pas terminée, c'est-à-dire, qu'on peut avoir à évaluer le nombre des boulets dans des piles tronquées triangulaires, quadrangulaires ou oblongues; c'est une chose facile, d'après ce qui précède.

14. Soient m le nombre des boulets des côtés de la base supérieure d'un tronc de pile triangulaire et n le nombre des boulets des arêtes latérales; le nombre des boulets des côtés de la base inférieure sera (4) $m+n-1$. On pourra ainsi considérer le tronc comme la différence entre deux piles triangulaires dont la plus grande aurait $m+n-1$ et la plus petite $m-1$ boulets à chaque arête. Le nombre des boulets du tronc sera donc (11)

$$\frac{(m+n-1)(m+n)(m+n+1)-(m-1)m(m+1)}{6}.$$

15. Soient m le nombre des boulets des côtés de la base supérieure d'un tronc de pile quarrée et n le nombre des boulets des arêtes latérales; le nombre des boulets des côtés de la base inférieure sera encore ici (4) $m+n-1$. On pourra alors considérer le tronc comme la différence entre deux piles quarrées dont la plus grande aurait $m+n-1$ et la plus petite $m-1$ boulets à chaque arête. Le nombre des boulets du tronc sera donc

$$\frac{(m+n-1)(m+n)(2m+2n-1)-(m-1)m(2m-1)}{6}.$$

16. Soient enfin m et n les nombres de boulets des deux côtés de la base supérieure d'un tronc de pile oblongue et p le nombre des boulets des arêtes latérales, les nombres de boulets des deux côtés de la base inférieure seront respectivement (4) $m+p-1$ et $n+p-1$. En supposant $m>n$, on pourra considérer le tronc

comme la différence entre deux piles oblongues qui auroient l'une et l'autre $m-n+1$ boulets à l'arête supérieure et dans lesquelles le petit côté de la base aurait $n+p-1$, boulets pour la plus grande, et $n-1$ pour la plus petite. Le nombre des boulets du tronc sera donc (13)

$$\frac{(n+p-1)(n+p)(3m-n+2p-1)-n(n-1)(3m-n-1)}{6},$$

ou bien, en développant et réduisant

$$\frac{p}{6}\left\{2p^2+3(m+n-1)p+(6mn-3m-3n+1)\right\};$$

formule symétrique en m et n, comme cela doit être, et qui renferme, comme cas particuliers, ceux de la pile oblongue et de la pile quarrée ; le premier s'en déduisant si l'on fait $n=1$, et l'autre si l'on fait en outre $m=1$.