ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

Questions résolues. Démonstration des quatre théorèmes de géométrie proposés à la page 255 du précédent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 25-28
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__25_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration des quatre théorèmes de géométrie proposés à la page 255 du précédent volume ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole royale des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

THÉORÈME I. *Trois lignes du* m.$^{\text{ième}}$ *ordre étant tracées dans un même plan ; on peut toujours, d'une infinité de manières différentes, en construire trois autres qui, ayant entre elles les mêmes* m^2 *points d'intersection, soient*

THÉORÈME I. *Trois lignes du* m.$^{\text{ième}}$ *ordre étant tracées sur un même plan ; on peut toujours, d'une infinité de manières différentes, en construire trois autres qui, ayant entre elles les mêmes* m^2 *tangentes communes,* *telles en outre que chacune d'elles passe par les* m² *points d'intersection de deux des trois premières.*

II. Quatre surfaces du m.ième *ordre étant données dans l'espace ; on peut toujours, d'une infinité de manières différentes, en construire quatre autres, ayant entre elles les mêmes* m³ *points communs, et telles en outre que chacune d'elles ait aussi les mêmes* m³ *points communs avec trois des quatre premières.*

soient telles en outre que chacune d'elles ait les m² *mêmes tangentes communes avec deux des trois premières.*

II. Quatre surfaces du m.ième *ordre étant données dans l'espace ; on peut toujours, d'une infinité de manières différentes, en construire quatre autres, ayant entre elles les mêmes* m³ *plans tangens communs, et telles en outre que chacune d'elles ait aussi les mêmes* m³ *plans tangens communs avec trois des quatre premières.*

Démonstration.

I. Si l'on représente par

$$M=0\,,\quad(1)\qquad M'=0\,,\quad(2)\qquad M''=0\,,\quad(3)$$

les équations de trois lignes quelconques du $m.^{ième}$ ordre, tracées sur un même plan, les suivantes

$$M''+\lambda M=0\,,\quad(4)\qquad\qquad M''+\lambda' M'=0\,,\quad(5)$$

appartiendront, quelles que soient les constantes λ et λ', à deux nouvelles lignes du $m.^{ième}$ ordre, passant, la première par les m^2 points d'intersection des lignes (1) et (3), et la seconde par les m^2 points d'intersection des lignes (2) et (3). L'équation

$$(M''+\lambda' M')+\mu(M''+\lambda M)=0\,,$$

c'est-à-dire,

$$\lambda\mu M+\lambda' M'+(1+\mu)M''=0\,,\qquad(6)$$

exprimera, par la même raison, une ligne assujettie à passer par les m^2 points communs aux lignes (4) et (5), et contiendra de plus les points d'intersection des lignes (1) et (2), si son équation est vérifiée par le système $M=0$, $M'=0$; condition à laquelle on peut satisfaire, sans rien spécifier sur λ et λ', en posant simplement $1+\mu=0$, d'où $\mu=-1$, ce qui réduit l'équation (6) à

$$\lambda M-\lambda' M'=0\;;$$

ce qui démontre le *théorème I*, d'où on déduit son corrélatif, par la théorie des polaires réciproques.

II. Soient présentement

$$M=0,\ (1)\qquad M'=0,\ (2)\qquad M''=0,\ (3)\qquad M'''=0,\ (2)$$

les équations de quatre surfaces quelconques du $m.^{\text{ième}}$ ordre, les suivantes

$$M'''+\lambda M''+\mu M'=0\,, \qquad (5)$$
$$M'''+\lambda' M+\mu' M''=0\,, \qquad (6)$$
$$M'''+\lambda'' M'+\mu'' M=0\,, \qquad (7)$$

appartiendront, quelles que soient les valeurs des constantes λ, λ', λ'', μ, μ', μ'', à trois nouvelles surfaces du même ordre assujetties à passer respectivement, savoir :

la surface (5), par les m^3 intersections des surfaces (2), (3), (4);
la surface (6), par les m^3 intersections des surfaces (3), (4), (1);
la surface (7), par les m^3 intersections des surfaces (4), (1), (2).

L'équation

$$M'''+\lambda'' M'+\mu'' M+\nu(M'''+\lambda M''+\mu M')+\nu'(M'''+\lambda' M+\mu' M'')=0\,,$$

ou bien

$$(\mu''+\lambda'\nu')M+(\lambda''+\mu\nu)M'+(\lambda\nu+\mu'\nu')M''+(1+\nu+\nu')M'''=0 \qquad (8)$$

appartiendra, par la même raison, à une huitième surface du $m.^{\text{ième}}$

ordre, passant par les m^3 points d'intersection des trois surfaces (5), (6), (7); mais cette équation contiendra en outre les m^3 points d'intersection des surfaces (1), (2), (3), si son équation se vérifie par le système

$$M=0\ , \quad M'=0\ , \quad M''=0\ ,$$

ce qui exige seulement qu'en laissant aux constantes λ, λ', λ'', μ, μ', μ'', toute leur indétermination, on détermine les constantes ν, ν', par la condition $1+\nu+\nu'=0$ ou $\nu'=-(1+\nu)$ et réduit ainsi l'équation (8) à la forme

$$[\mu''-\lambda'(1+\nu)]M+(\lambda''+\mu\nu)M'+[\nu(\lambda-\mu')-\mu']M''=0\ ,$$

ce qui démontre le *théorème II*, d'où on conclut ensuite son corrélatif, par la considération des polaires réciproques.