ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

J. STEINER

Questions proposées. Théorème sur le quadrilatère complet

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 302-304

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__302_0>

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorème sur le quadrilatère complet ;

Proposé à démontrer par M. J. Steiner, géomètre, de Berlin (*).

Quatre droites A, B, C, D, se coupant deux à deux en six points, et se trouvant conséquemment comprises dans un même plan.

1.° Ces quatre droites, prises trois à trois, forment quatre triangles tels que les cercles circonscrits passent tous quatre par un même point P.

2.° Les centres α, β, γ, δ, de ces quatre cercles se trouvent, avec le point P, à la circonférence d'un cinquième cercle.

(*) Bien que nous nous soyons abstenus jusqu'ici de désigner les auteurs des nombreuses questions proposées dans nos livraisons, nous sentons toutefois que, lorsque ces questions consistent dans des théorèmes de quelque importance, ce peut être alors un acte de justice ou tout au moins de convenance.

Nous saisirons donc, avec plaisir, cette occasion de déclarer que l'élégant théorème démontré par M. Lenthéric, à la page 366 de notre XVII.e volume, nous a été indiqué par M. W. H. Talbot, de la Société philosophique de Cambridge.

3.° Les pieds des perpendiculaires abaissées du point P sur les directions de A, B, C, D, appartiennent tous quatre à une même droite R, et cette propriété appartient exclusivement au point P.

4.° Les points de concours des perpendiculaires abaissées des sommets sur les directions des côtés opposés, dans les quatre triangles (1.°) appartiennent à une même droite R′.

5.° Les droites R et R′ sont parallèles, et la droite R passe par le milieu de la perpendiculaire abaissée du point P sur R′.

6.° Les milieux des diagonales du quadrilatère complet formé par les quatre droites A, B, C, D, appartiennent tous trois à une même droite R″ (*Newton*).

7.° La droite R″ est perpendiculaire commune aux deux droites R, R′.

8.° Pour chacun des quatre triangles (1.°) il y a un cercle inscrit et trois cercles exinscrits, ce qui fait en tout *seize* cercles; dont les centres sont quatre à quatre sur une circonférence, de manière à donner naissance à *huit* nouveaux cercles.

9.° Ces huit nouveaux cercles se partagent en deux groupes tels que chacun des quatre cercles de l'un de ces groupes, coupe orthogonalement tous les cercles de l'autre groupe; on en conclut que les centres des cercles des deux groupes sont sur deux droites perpendiculaires l'une à l'autre.

10.° Enfin ces deux dernières droites se coupent au point P, mentionné ci-dessus.

Autres théorèmes de géométrie.

(Par le même).

I. Si l'on décrit trois cercles A, B, C, de manière que chacun d'eux touche un des côtés d'un triangle et les prolongemens des deux autres, et si l'on décrit ensuite trois autres cercles A′, B′,

C', de manière que chaucun d'eux touche deux des trois premiers extérieurement et le troisième intérieurement, ces trois derniers se couperont en un même point P, et les droites qui joindront ce point P aux centres des trois premiers seront respectivement perpendiculaires aux trois côtés du triangle.

II. Si l'on décrit quatre sphères A, B, C, D, de manière que chacune d'elles touche une des faces d'un tétraèdre et les prolongemens des trois autres, et si l'on décrit ensuite quatre autres sphères A', B', C', D', de manière que chacune d'elles touche trois des quatre premières extérieurement et la quatrième intérieurement, ces quatre dernières se couperont en un même point P, et les droites qui joindront ce point P aux centres des quatre premières seront respectivement perpendiculaires aux quatre faces du tétraèdre.