ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GEORGE BIDONE

Mécanique appliquée. Note sur la longueur du pendule simple, et sur l'intensité de la gravité terrestre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 341-352

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__341_0>

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Note sur la longueur du pendule simple, et sur l'intensité de la gravité terrestre;

Par M. GEORGE BIDONE, professeur à l'Université et membre de l'Académie royale des sciences de Turin.

LORSQUE, de la longueur du pendule simple, déterminée directement pour un endroit situé à une certaine hauteur au-dessus du niveau de la mer, on déduit la longueur qu'aurait ce même pendule placé au niveau de la mer, on suppose que la masse, qui fait osciller le pendule placé au niveau de la mer, est la même que celle qui fait osciller ce pendule placé à l'endroit de l'observation, et l'on ne fait, par conséquent, d'autre correction que celle qui est due à la moindre distance au centre d'action du globe terrestre.

Effectivement, Laplace a fait voir que les plateaux élevés au-dessus du niveau de la mer n'exercent aucune action sensible sur l'intensité de la gravité et sur le pendule, à l'exception du cas où ils sont très-inclinés et où leur centre d'action se trouve fort près du lieu de l'observation.

Mais, outre l'action des plateaux, quelle qu'elle soit, il en est une autre à laquelle il ne paraît pas qu'on ait eu égard jusqu'ici. A la vérité, elle est toujours fort petite; mais, puisque cette action existe réellement, et que d'ailleurs on a cherché, dans ces derniers temps, à apporter toute la précision et l'exactitude possibles dans la détermination de la longueur du pendule, à raison des grandes questions que cette détermination sert à résoudre, il n'est pas inutile de la considérer et d'en apprécier la grandeur et l'influence.

1. On sait, par la théorie de l'attraction, que la gravité d'un point matériel, placé à la surface de la terre supposée sphérique, et au niveau de la mer, ne dépend pas de la masse de l'atmosphère, supposée également sphérique, dont la surface de la terre est enveloppée. Mais si l'on considère un point matériel, situé à une hauteur h au-dessus du niveau de la mer, l'intensité de la gravité terrestre sur ce point dépendra à la fois de la masse de la terre et de la masse de toute la couche atmosphérique dont l'épaisseur est h.

Soient donc A un point situé au niveau de la mer, et B un autre point élevé à la hauteur h au-dessus de ce niveau, et placé sur le prolongement du rayon terrestre R qui passe par le point A. Soient M la masse de la terre, en n'y comprenant pas celle de son atmosphère, et m la masse de la couche sphérique d'air qui a pour épaisseur la distance h du point A au point B. Soient enfin g la gravité et l la longueur du pendule simple en A, et soient g' et l' la gravité et la longueur du pendule simple en B, on aura

$$(1) \qquad g = g'\left(1+\frac{h}{R}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\frac{m}{M}},$$

$$(2) \qquad l = l'\left(1+\frac{h}{R}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\frac{m}{M}}.$$

Si, dans ces équations, on néglige les termes $\frac{h^2}{R^2}$, $\frac{m}{M}$, elles deviennent

$$g = g'\left(1 + \frac{2h}{R}\right),$$

$$l = l'\left(1 + \frac{2h}{R}\right);$$

et ce sont celles, en effet, dont on se sert pour réduire, au niveau de la mer, l'intensité de la gravité et la longueur du pendule, observées à la hauteur h au-dessus de ce niveau.

2. Evaluons la grandeur du terme $\frac{m}{M}$ provenant de l'attraction de la courbe sphérique d'air comprise entre les rayons R et $R+h$. Pour cela, soit Δ la densité moyenne du globe terrestre, nous aurons

$$M = \frac{4}{3}\varpi\Delta R^3;$$

Soit μ la masse de toute l'atmosphère terrestre et ω l'épaisseur d'une couche sphérique de matière de même densité Δ que celle de la terre, et équivalente à la masse μ de l'atmosphère; le centre de cette couche étant le même que celui de la terre, et ses rayons étant R et $R+\omega$, nous aurons

$$M+\mu = \frac{4}{3}\varpi\Delta(R+\omega)^3.$$

En divisant cette équation par la précédente, et en négligeant les puissances de $\frac{\omega}{R}$ supérieures à la première, il vient

$$\frac{\mu}{M} = \frac{3\omega}{R}.$$

Présentement, la densité de l'eau étant prise pour unité, on a trouvé pour Δ ces deux valeurs, savoir:

$$\Delta=4,5, \qquad \Delta=5,5 .$$

En prenant donc $0^m,76$ pour la hauteur du mercure dans le baromètre, au niveau de la mer, 13,598 pour la densité du mercure, $R=6366198^m$, on aura, par la première valeur de Δ,

$$\omega=(0,76)\,\frac{13,598}{4,5}=2^m,30 ,$$

$$\mu=(0,0000001084)M ;$$

et par l'autre valeur de Δ

$$\omega=(0,76)\,\frac{13,598}{5,5}=1^m,88 ,$$

$$\mu=(0,000000886)M .$$

La valeur moyenne de μ est donc

$$\mu=(0,000001)M ;$$

c'est-à-dire, que la masse de l'atmosphère terrestre est, à très-peu près, la millionième partie de la masse de la terre. D'après cela, chaque millimètre de mercure dans le baromètre correspond à une couche d'air dont la masse est

$$(0,000000001316)M .$$

Par conséquent, si le baromètre, à la station B, est plus bas de n millimètres qu'au point A où il est supposé à 760 millimètres, la masse m de la couche sphérique d'air dont $AB=h$ est l'épaisseur, sera

$$m=(0,000000001316)nM .$$

3. On peut maintenant évaluer l'influence du terme $\frac{m}{M}$, dans les équations (1) et (2), d'après les observations faites à diverses hauteurs h. Prenons, pour premier exemple, les expériences faites à l'équateur par Bouguer, au niveau de la mer, à Quito et sur le Pichincha. Il a trouvé la hauteur du mercure dans le baromètre

Au niveau de la mer $337^{\text{lig.}} = 760^{\text{mm}},27$,

A Quito. . . . . $241 = 543,70$,

Sur le Pichincha . . . $191 = 430,90$.

De plus, les stations faites à Quito et sur le Pichincha étaient élevées au-dessus du niveau de la mer de 2857 mètres et de 4744 mètres, respectivement. D'après ces données, et, en prenant pour rayon de l'équateur $R' = 6376984$ mètres, on a, pour la station faite sur le Pichincha,

$$\frac{2h}{R'} = 0{,}001487851\ ,$$

$$\frac{h^2}{R'^2} = 0{,}000000553\ ,$$

$$\frac{m}{M} = 0{,}000000433\ ;$$

d'où

$$\frac{m}{M} = (0{,}78)\ \frac{h^2}{R'^2}\ .$$

Pour la station faite à Quito, on a

$$\frac{2h}{R'} = 0{,}000896035\ ;$$

$$\frac{h^2}{R'^2}=0{,}000000201\ ,$$

$$\frac{m}{M}=0{,}000000285\ ;$$

d'où

$$\frac{m}{M}=(1{,}42)\ \frac{h^2}{R'^2}\ .$$

Prenons pour deuxième exemple les expériences faites à Clermont en Auvergne, par MM. Biot et Mathieu, pour y déterminer la longueur du pendule décimal (*Base du système métrique*, tom. IV, pag. 515). Ils ont trouvé pour cette longueur

$$l'=0^{m},7416106\ ,$$

à laquelle ils ont ajouté la quantité

$$\frac{2hl'}{R}=0{,}000094585\ ,$$

pour la correction due à la hauteur de cette station au-dessus du niveau de la mer. On a donc ici

$$\frac{2h}{R}=0{,}0001274 05\ ,$$

$$\frac{h^2}{R^2}=0{,}000000004\ .$$

Pour avoir la valeur de $\frac{m}{M}$ qui convient à cette station dont on n'a pas rapporté les observations barométriques, mais seulement la hauteur au-dessus du niveau de la mer, conclue par M. Ramond de 406 mètres ; je remarque que cette hauteur coïncide avec celle de Genève, qui est 407 mètres. Or, à Genève, la hauteur moyenne du mercure dans le baromètre est de $726^{mm},7$, tandis qu'au niveau de la mer et à la même température, la hauteur du mercure dans le baromètre est de $762^{mm},9$; la différence $36^{m},2^{m}$ sera donc celle que j'adopterai pour la station de Clermont en Auvergne. Avec cette valeur, on trouve

$$\frac{m}{M}=0{,}000000048 \,,$$

$$\frac{m}{M}=12.\frac{h^2}{R^2} \,.$$

Prenons enfin, pour troisième exemple, les expériences faites à Formentera, par MM. Biot, Arago et Chaix (*Base du système métrique*, tom IV, pag. 485) Ils ont trouvé, par l'observation directe, la hauteur du mercure dans le baromètre, au niveau de la mer de $769^{mm},19$, et à la station de $751^{mm},10$; de sorte que la différence est ici $18^{mm},09$. Pareillement, ils ont trouvé, pour la longueur du pendule simple décimal, avant la petite correction qu'ils ont faites depuis, à cause de la règle de fer dont ils se sont servis dans ces expériences,

$$l'=0^{m},7412625 \,.$$

Pour réduire cette longueur au niveau de la mer, ils y ont ajouté la quantité

$$\frac{2l'h}{R}=0^{m},0000466 \,;$$

on a donc ici

$$\frac{2h}{R}=0{,}0000629 \,;$$

$$\frac{h^2}{R^2}=0,0000000000986\ ,$$

$$\frac{m}{M}=0,0000000023806\ ;$$

c'est-à-dire,

$$\frac{m}{M}=24.\frac{h^2}{R^2}\ .$$

4. Par ces exemples, on voit d'abord que, lorsque la station est fort élevée au-dessus du niveau de la mer, la valeur du terme $\frac{m}{M}$ est sensiblement du même ordre que celle du terme $\frac{h^2}{R^2}$; mais, dans les stations moins élevées, la valeur de ce terme peut devenir beaucoup plus grande que celle du terme $\frac{h^2}{R^2}$. On voit encore que les termes

$$\frac{m^2}{M^2}\ ,\quad \frac{2hm}{RM}\ ,\quad \frac{h^2m}{R^2M}\ ,$$

sont en général très-petits, par rapport aux termes

$$\frac{m}{M}\ ,\quad \frac{2h}{R}\ ,\quad \frac{h^2}{R^2}\ ;$$

par conséquent, les équations (1) et (2) peuvent se réduire aux suivantes :

$$g=g'\left(1+\frac{2h}{R}+\frac{h^2}{R^2}-\frac{m}{M}\right)\ , \tag{3}$$

$$l=l'\left(1+\frac{2h}{R}+\frac{h^2}{R^2}-\frac{m}{M}\right)\ . \tag{4}$$

Les valeurs de $\frac{h^2}{R^2}-\frac{m}{M}$ seront

Sur le Pichincha. . . . . . $+0{,}000000120$,

A Quito . . . . $-0{,}000000084$,

A Clermont en Auvergne . $-0{,}000000044$,

A Formentera . . . . $-0{,}000000023$;

d'où on peut conclure qu'il est une hauteur au-dessus du niveau de la mer, entre la hauteur de la station faite sur le Pichincha et la hauteur de la station faite à Quito, pour laquelle $\frac{h^2}{R^2}-\frac{m}{M}$ est nulle ; que, pour des hauteurs plus grandes que celle-là, cette quantité est positive, mais qu'elle est négative pour des hauteurs moindre; ce qui est le cas des hauteurs auxquelles ont été faites la plupart des expériences sur la longueur du pendule.

Mais pour voir plus clairement la marche de la quantité $\frac{h^2}{R^2}-\frac{m}{M}$, nommons δ la densité moyenne de la couche sphérique d'air dont l'épaisseur est h; nous aurons, en négligeant le terme $\frac{h^3}{R^3}$,

$$\frac{m}{M}=\frac{\delta}{\Delta}\left(\frac{3h}{R}+\frac{3h^2}{R^2}\right),$$

et, par suite, en négligeant encore le terme $\frac{3\delta}{\Delta}$ vis-à-vis de l'unité,

$$(5) \qquad \frac{h^2}{R^2}-\frac{m}{M}=\frac{h^2}{R^2}-\frac{3\delta}{\Delta}\cdot\frac{h}{R}\ ;$$

La densité δ est une fonction de h dont la forme nous est jusqu'à présent inconnue; mais, malgré cela on voit que, dans la question actuelle, on a

$$\frac{h^2}{R^2}-\frac{m}{M}=0\,,\quad \text{pour } h=0 \quad \text{ou pour } h=\frac{3\delta}{\Delta}.R\,.$$

Ainsi la quantité $\frac{h^2}{R^2}-\frac{m}{M}$ a une valeur maximum comprise entre les deux valeurs précédentes de h, donnée par l'équation

$$\frac{2h}{R^2}-\frac{3\delta}{\Delta.R}-\frac{3h}{\Delta.R}\cdot\left(\frac{d\delta}{dh}\right)=0\,.$$

En mettant dans les équations (3) et (4) la valeur de $\frac{h^2}{R^2}-\frac{m}{M}$, donnée par l'équation (5), elles deviendront

$$(6)\qquad g=g'\left(1+\frac{2h}{R}+\frac{h^2}{R^2}-\frac{3\delta}{\Delta}\cdot\frac{h}{R}\right),$$

$$(7)\qquad l=l'\left(1+\frac{2h}{R}+\frac{h^2}{R^2}-\frac{3\delta}{\Delta}\cdot\frac{h}{R}\right).$$

Ces équations donnent la réduction de la gravité et de la longueur du pendule au niveau de la mer, lorsqu'on a égard à l'attraction de la couche sphérique d'air comprise entre le niveau de la mer et le lieu de l'observation.

Les exemples précédens, bien que subordonnés à l'hypothèse de la terre sphérique et à la valeur adoptée de la densité Δ, suffisent pour donner une idée de l'influence exercée sur la longueur du pendule, réduite au niveau de la mer, par l'attraction de la masse m de la couche d'atmosphère terrestre entre deux sphères concentriques, dont l'une a pour rayon la distance du centre de la terre à la surface des mers, tandis que le rayon de l'autre est cette même distance augmentée de la hauteur de la station au-dessus du niveau de la mer.

5. Il suit encore de ces considérations que, dans un même lieu situé à la hauteur h au-dessus du niveau de la mer, la partie m de la masse $M+m$ qui fait osciller le pendule, est variable sui-

vant les variations du baromètre ; de sorte qu'en toute rigueur l'intensité de la gravité, dans un lieu qui n'est pas au niveau de la mer, n'est pas constante, mais qu'elle éprouve des petites variations, en plus ou en moins, qui dépendent des variations de densité de la couche d'air comprise entre ce lieu et le niveau de la mer.

6. On voit aussi que, si l'on avait une suite d'observations directe sur l'intensité de la pesanteur, les unes faites au niveau de la mer et les autres à des hauteurs connues au-dessus de ce niveau, et exactes jusqu'au neuvième chiffre, on pourrait en conclure la valeur du rapport $\frac{m}{M}$, et, par conséquent, la valeur de la densité moyenne Δ de la terre, d'après une formule facile à trouver, par ce qui précède, et qui a été déjà donnée à la pag. 360 du tom. X.^{e} des *Annales*, dans un mémoire dont le présent écrit n'est qu'une conséquence et une extension.

7. Je terminerai cette note par quelques remarques sur le même sujet. Si la masse μ de toute l'atmosphère terrestre était concentrée dans le sphéroïde même qu'elle enveloppe, la gravité terrestre qui, pour les latitudes moyennes, a pour valeur

$$g=9^{m},8087952\ ,$$

deviendrait

$$G=\frac{M+\mu}{M}.g=9^{m},8088050\ ;$$

Par conséquent, lorsqu'on compare la gravité g, considérée à la surface de la terre, à la gravité g' exercée par cette planète sur un point matériel situé au-delà de l'atmosphère terrestre, et à la distance H de la surface de la terre, on a

$$g'=g\left(\frac{M+\mu}{M}\right)\frac{R^2}{(R+H)^2}=G.\frac{R^2}{(R+H)^2}\ ;$$

c'est-à-dire, que pour avoir la gravité g', il faut employer la valeur de G, et non celle de g.

8. Lorsque, par les phénomènes astronomiques, on détermine les masses des planètes, ou, pour mieux dire, les rapports que ces masses ont entre elles, on comprend nécessairement dans ces masses celles des atmosphères dont ces planètes peuvent être enveloppées. Or, il résulte de ce qui précède que la connaissance de ces masses totales ne suffit pas pour déterminer l'intensité de la gravité, *à la surface* de ces planètes; car, cette intensité ne dépend point des masses des atmosphères. Il faut, pour la déterminer, connaître séparément les masses des planètes et celles de leurs atmosphères, ou du moins leur rapport qui peut être fort différent d'une planète à l'autre, et beaucoup plus considérable que celui qui existe entre la masse du sphéroïde terrestre et celle de son atmosphère.

Turin, le 12 avril 1828.