ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Optique. Démonstration abrégée de deux théorèmes de M. de St-Laurent, sur les caustiques par réfraction relatives au cercle

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 48-55
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__48_0>

OPTIQUE.

Démonstration abrégée de deux théorèmes de M. de St-Laurent, *sur les caustiques par réfraction relatives au cercle*;

Par M. GERGONNE.

En réfléchissant sur les recherches d'optique de M. de St-Laurent, dont nous avons rendu compte au commencement de ce volume, nous avons reconnu qu'on pouvait parvenir fort simplement aux deux théorèmes obtenus par l'auteur; et nous publions d'autant plus volontiers les résultats de nos réflexions sur ce sujet épineux, qu'ils paraissent offrir une voie nouvelle pour parvenir, sans trop de calcul, à l'équation générale dont M. de St-Laurent n'a considéré que quelques cas particuliers.

Soit toujours pris le centre du cercle séparateur, dont nous supposons le rayon r, pour origine des coordonnées rectangulaires; soient (x',y') le point rayonnant et le rapport de λ' à λ celui du sinus d'incidence au sinus de réfraction. On sait que si, de tous les points de la circonférence séparatrice, pris tour à tour pour centres et avec des rayons qui soient aux distances de ces centres au point rayonnant dans le rapport de λ à λ', on décrit des cercles, l'enveloppe de tous ces cercles sera une des trajectoires orthogonales des rayons réfractés ; et l'on trouve facilement pour l'équation de cette trajectoire l'équation donnée page 3 ; c'est-à-dire,

$$\{\lambda'^2(x^2+y^2-r^2)-\lambda^2(x'^2+y'^2-r^2)\}^2=4\lambda^2\lambda'^2r^2\{(x-x')^2+(y-y')^2\} ; (1)$$

de sorte que la caustique n'est autre que la développée de cette courbe.

Si, d'après cela, on demandait une des trajectoires orthogonales, pour un cercle réfléchissant d'un rayon R, concentrique à celui-là, et pour un point rayonnant (X, Y), il faudrait poser, dans cette équation, $x'=X$, $y'=Y$, $r=R$ et $\lambda'=-\lambda$; ce qui donnerait

$$(x^2+y^2-X^2-Y^2)^2=4R^2\{(x-X)^2+(y-Y)^2\} . \quad (2)$$

La comparaison des équations (1) et (2) va nous conduire directement à notre but.

I. Supposons d'abord, dans l'équation (1) que le point rayonnant est sur la circonférence du cercle séparateur ; nous exprimerons cette circonstance en écrivant

$$x'^2+y'^2=r^2 ; \qquad (3)$$

au moyen de quoi cette équation deviendra, en éliminant r^2 de son premier membre et divisant ensuite par λ'^4,

$$(x^2+y^2-x'^2-y'^2)^2=4\left(\frac{\lambda}{\lambda'}r\right)^2\{(x-x')^2+(y-y')^2\} .$$

Or, pour faire coïncider cette dernière équation avec l'équation (2), il suffit de poser

$$x'=X\ ,\quad y'=Y\ ,\quad \frac{\lambda}{\lambda'}r=R\ ; \qquad (4)$$

on a donc ce théorème :

La caustique par réfraction, relative à un cercle et à un point rayonnant situé sur sa circonférence, n'est autre que la caustique par réflexion relative au même point et à un cercle réfléchissant qui, étant concentrique au cercle séparateur, aurait un rayon égal à celui de ce cercle, multiplié par le rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence.

Puis donc que la caustique par réflexion relative à un cercle réfléchissant dont le rayon est R et à un point rayonnant (X, Y) a pour équation (*Annales*, tom. XVII, pag. 134)

$$\{4(X^2+Y^2)(x^2+y^2)-R^2[(x+X)^2+(y+Y)^2]\}^2=27R^4(Yx-Xy)^2(x^2+y^2-X^2-Y^2)^2\ ; \qquad (5)$$

en y mettant pour X, Y, R les valeurs (4) ci-dessus, on aura, pour l'équation de la caustique par réfraction relative au cercle dont le rayon est r et à un point (x', y') situé sur la circonférence de ce cercle

$$\{4\lambda'^2(x'^2+y'^2)(x^2+y^2)-\lambda^2r^2[(x+x')^2+(y+y')^2]\}^2=27\lambda^4r^4(y'x-x'y)^2(x^2+y^2-x'^2-y'^2)^2\ ;$$

précisément comme M. de St-Laurent l'a trouvée.

II. Supposons, en second lieu, que la distance du point rayonnant au centre du cercle séparateur soit au rayon de ce cercle comme le sinus d'incidence est au sinus de réfraction ; nous exprimerons cette circonstance en écrivant

$$\frac{r^2}{x'^2+y'^2}=\frac{\lambda'^2}{\lambda^2}\ , \qquad \text{d'où} \qquad \lambda'^2=\lambda^2\,\frac{x'^2+y'^2}{r^2}\ , \qquad (6)$$

en substituant cette valeur dans l'équation (1) et divisant par λ^4, elle deviendra

$$\{(x'^2+y'^2)(x^2+y^2-r^2)-r^2(x'^2+y'^2-r^2)\}^2=4r^4(x'^2+y'^2)\{(x-x')^2+(y-y')^2\}\ ;$$

ou bien

$$\{[(x'^2+y'^2)(x^2+y^2)-r^4]-2r^2(x'^2+y'^2-r^2)\}^2=4r^4(x'^2+y'^2)\{(x-x')^2+(y-y')^2\}\ ;$$

ou encore, en développant le premier membre, comme le quarré d'un binome et transposant

$$\{(x'^2+y'^2)(x^2+y^2)-r^4\}^2$$

$$=4r^2(x'^2+y'^2-r^2)[(x'^2+y'^2)(x^2+y^2)-r^4]-4r^4(x'^2+y'^2+r^2)^2+4r^4(x'^2+y'^2)\{(x-x')^2+(y-y')^2\}\ ;$$

ou bien, en développant le second membre et en ordonnant par rapport à r

$$\{(x'^2+y'^2)(x^2+y^2)-r^4\}^2$$

$$=4r^2\{(x'^2+y'^2)^2(x^2+y^2)-2r^2(x'^2+y'^2)(xx'+yy')+r^4(x'^2+y'^2)\}$$

$$=4r^2\{[(x'^2+y'^2)x-r^2x']^2+[(x'^2+y'^2)y-r^2y']^2\}\ ;$$

d'où, en divisant par $(x'^2+y'^2)^2$,

$$\left\{(x^2+y^2)-\frac{r^4}{x'^2+y'^2}\right\}^2$$

$$=4r^2\left\{\left[x-\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2}\right]^2+\left[y-\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}\right]^2\right\}$$

ou bien enfin

$$\left\{x^2+y^2-\left(\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2}\right)^2-\left(\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}\right)^2\right\}^2$$

$$=4r^2\left\{\left[x-\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2}\right]^2+\left[y-\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}\right]^2\right\}.$$

Or, pour faire coïncider cette dernière équation avec l'équation (2), il suffit de poser

$$\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2}=X\,,\qquad \frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}=Y\,,\quad r=R\,,\qquad (7)$$

ce qui donne

$$(X^2+Y^2)(x'^2+y'^2)=r^4\,,\qquad \frac{X}{x'}=\frac{Y}{y'}\,,$$

et prouve ainsi que le point (X, Y) est le conjugué de (x', y'), par rapport au cercle séparateur; on a donc ce théorème :

La caustique par réfraction, relative au cercle, et à un point rayonnant dont la distance au centre du cercle séparateur est au rayon de ce cercle dans le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, n'est autre que la caustique par réflexion relative au même cercle, considéré comme cercle réfléchissant, et à un autre point rayonnant qui serait le conjugué de celui-là.

Au moyen de la relation (6), les valeurs (7) deviennent

$$X=\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}x'\,,\qquad Y=\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}y'\,,\quad R=r\;;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (5), on obtiendra, pour l'équation de la caustique par réfraction qui répond au cas particulier qui nous occupe,

$$\{4\lambda^4(x'^2+y'^2)(x^2+y^2)-r^2[(\lambda'^2x+\lambda^2x')^2+(\lambda'^2y+\lambda^2y')^2]\}^2$$

$$=\lambda^4r^4(y'x-x'y)^2\{\lambda'^4(x^2+y^2)-\lambda^4(x'^2+y'^2)\}^2\ ;$$

exactement comme l'a trouvé M. de St-Laurent.

Les deux théorèmes que nous venons de démontrer, d'une manière qui nous paraît assez briève, donnent lieu de soupçonner qu'il se pourrait bien qu'en général la caustique par réfraction, relative à un cercle séparateur et à un point rayonnant donnés, ne fût qu'une caustique par réflexion relative soit au même cercle soit à un autre cercle, concentrique ou non concentrique à celui-là, du même rayon ou d'un rayon différent, considéré comme cercle réflecteur et au même point ou à un autre point rayonnant.

Si ce soupçon était conforme à la vérité, ce que pourtant nous n'oserions affirmer, le procédé que nous venons de suivre, convenablement modifié et généralisé, paraîtrait le plus propre à conduire facilement à l'équation de cette courbe. Comme d'ailleurs elle doit être symétrique par rapport à la droite qui joint le point donné au centre du cercle donné, il est manifeste que le nouveau point rayonnant et le centre du cercle réflecteur devraient être tous deux situés sur cette droite; et voici, d'après cette remarque, de quelle manière on pourrait procéder.

Sur une même droite indéfinie on placerait les centres de deux cercles C et C', le premier réputé séparateur et le second réflecteur, ayant des rayons quelconques R et R'. Sur la même droite, on supposerait des points rayonnans P et P', respectivement relatifs à ces deux cercles. On chercherait ensuite les trajectoires orthogonales, tant des rayons réfractés relatifs au premier de ces points et au premier cercle que des rayons réfléchis relatifs au second point et à l'autre cercle ; et il ne s'agirait plus que d'exprimer que ces deux trajectoires se confondent, et de déduire de là la grandeur du second cercle, ainsi que sa situation et celle du point P', par rapport au cercle C et au point P.

Nous observerons seulement à ceux qui voudraient s'engager dans cette voie, et en particulier à M. de St-Laurent, à qui il ne saurait convenir sans doute, après s'être approché si près du but, de le laisser atteindre par d'autres, que, dans ce qui précède, nous n'avons employé qu'une trajectoire orthogonale déterminée, et que peut-être ici il serait nécessaire, pour ne se priver d'aucune chance de coïncidence, d'employer l'équation générale de toutes les trajectoires, contenant une constante arbitraire, ou tout au moins leur équation différentielle commune.

En admettant même que les caustiques par réfraction relatives au cercle ne soient pas toutes des caustiques par réflexion relatives à la même courbe ; le procédé que nous indiquons ici serait encore propre à faire découvrir si les deux cas que nous venons de signaler sont les seuls où il en soit ainsi, ou si au contraire il y en a d'autres et quels ils sont.

C'est, il faut en convenir, une sorte de honte pour la science et pour ceux qui la cultivent que, depuis plus d'un siècle que l'on connaît les caustiques et qu'on sait très-bien qu'elles seules peuvent offrir à l'optique une base solide, on se soit encore si peu occupé à les étudier ; et que, tandis que nous possédons tant d'habiles géomètres, que tant de difficiles problèmes ont été résolus par eux, et qu'en particulier nous emmagasinons par centaines des intégrales définies, dont la plupart ne trouveront peut-être jamais d'application, nous en soyons encore réduits aujourd'hui à attendre du hasard ou d'un tâtonnement empyrique de bons oculaires composés pour nos lunettes. Ce n'est seulement que depuis une douzaine d'années qu'on sait que la caustique par réfraction relative à la ligne droite est la développée d'une section conique; c'est depuis moins de temps encore qu'il a été reconnu que les verres plans à faces parallèles amplifient les objets; et c'est depuis l'an dernier seulement que l'équation générale de la caustique par réflexion relative au cercle est connue.

En vain dirait-on que les théorèmes de Petit offrent un moyen facile de construire par points les caustiques relatives au cercle, tant par réflexion que par réfraction : il est manifeste en effet que les constructions graphiques ne sauraient donner que des caustiques individuelles, et que les équations de ces courbes ont seules le privilége de les renfermer toutes. En vain dirait-on encore qu'on n'a besoin, dans la théorie des lunettes, que de connaître les portions de caustiques voisines de l'axe des lentilles, et qu'alors on peut à la vérité rigoureuse substituer des approximations faciles, comme l'a fait en particulier M. le professeur de la Rive; ces moyens d'abréviation pourraient au plus être tolérables pour une réfraction unique; mais qui oserait répondre de l'influence des quantités négligées sur le résultat final, lorsqu'un rayon de lumière a traversé successivement les deux faces de trois ou quatre lentilles ?