ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

Géométrie transcendante. Recherches sur les courbes à double courbure dont les développantes sont sphériques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 57-67
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__57_0>

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Recherches sur les courbes à double courbure dont les développantes sont sphériques ;

Par M. Bobillier, professeur de Mathématiques à l'Ecole royale des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

Soient x', y', z' les coordonnées courantes d'une courbe à double courbure, x_1, y_1, z_1 celles de l'extrémité d'un fil tangent à la courbe au point (x', y', z') et s la longueur de ce fil, comptée du point de contact, ou, ce qui revient au même, la longueur de l'arc de cette courbe compris depuis le point de contact jusqu'à l'origine du développement. Les projections du fil sur les trois axes, supposés rectangulaires, seront $x'-x_1$, $y'-y_1$, $z'-z_1$ et conséquemment ces mêmes quantités, divisées par s, donneront les cosinus tabulaires des angles formés par la direction de ce même fil avec les trois axes ; en sorte que l'on aura

$$\frac{dx'}{ds}=\frac{x'-x_1}{s}\,, \qquad \frac{dy'}{ds}=\frac{y'-y_1}{s}\,, \qquad \frac{dz'}{ds}=\frac{z'-z_1}{s}\,;$$

et, par suite,

$$x_1=x'-s\frac{dx'}{ds}\,, \qquad y_1=y'-s\frac{dy'}{ds}\,, \qquad z_1=z'-s\frac{dz'}{ds}\,. \qquad (1)$$

Différentiant ces trois équations en regardant s comme la variable indépendante, et conséquemment ds comme constante, ce qui permet de poser

$$d(dx'^2+dy'^2+dz'^2)=0\ ,\quad \text{d'où}\quad dx'd^2x'+dy'd^2y'+dz'd^2z'=0\ , \quad (2)$$

il viendra, en supprimant les termes qui se détruisent,

$$dx_1=-sd\frac{dx'}{ds}\ ,\qquad dy_1=-sd\frac{dy'}{ds}\ ,\qquad dz_1=-sd\frac{dz'}{ds}\ ; \quad (3)$$

prenant la somme des produits respectifs de ces trois équations par dx', dy', dz', en remarquant (2) que le second membre de l'équation résultante est nul, on trouvera

$$dx'dx_1+dy'dy_1+dz'dz_1=0\ ; \qquad (4)$$

équation qui exprime évidemment que la développante est constamment perpendiculaire à la direction du fil.

Soit actuellement

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

l'équation de la sphère sur laquelle doit se trouver la développante; on en tirera, par différentiation,

$$xdx+ydy+zdz=0\ ;$$

or, comme le point (x_1, y_1, z_1) s'y trouve situé, on doit avoir

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=a^2\ ,$$

d'où

$$x_1dx_1+y_1dy_1+z_1dz_1=0\ . \qquad (5)$$

Mettant dans l'avant dernière équation les valeurs (1), et dans la dernière les valeurs (2), il vient

$$\left(x'-s\frac{dx'}{ds}\right)^2+\left(y'-s\frac{dy'}{ds}\right)^2+\left(z'-s\frac{dz'}{ds}\right)^2=a^2\ , \quad (6)$$

$$x_1 \mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s}+y_1 \mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s}+z_1 \mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s}=0 . \qquad (7)$$

L'équation (6) établit un relation entre l'arc de la courbe cherchée, ses coordonnées courantes et leurs différentielles; en la développant, elle prend la forme

$$x'^2+y'^2+z'^2-2s\left(x'\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s}+y'\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s}+z'\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s}\right)+s^2=a^2 . \qquad (8)$$

En intégrant l'équation (7) et remarquant que

$$\int x_1 \mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s}=x_1\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s}-\int\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}x_1 ,$$

$$\int y_1 \mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s}=y_1\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s}-\int\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}y_1 ,$$

$$\int z_1 \mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s}=z_1\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s}-\int\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}z_1 ,$$

on trouve

$$x_1\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s}+y_1\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s}+z_1\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s}-\int\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}x_1+\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}y_1+\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}z_1\right)=C .$$

ou, parce qu'en vertu de l'équation (4) la quantité soumise au signe d'intégration est nulle,

$$x_1\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s}+y_1\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s}+z_1\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s}=C . \qquad (9)$$

Si l'on désigne par φ l'angle que fait la direction du fil avec celle de la normale au point (x_1, y_1, z_1) de la sphère où il se termine, on aura, en vertu d'une formule connue, et parce que

$\frac{x_1}{a}$, $\frac{y_1}{a}$, $\frac{z_1}{a}$ sont les cosinus des angles que forme cette normale avec les axes

$$\text{Cos}\,\varphi=\frac{x_1}{a}\,\frac{\text{d}x'}{\text{d}s}+\frac{y_1}{a}\,\frac{\text{d}y'}{\text{d}s}+\frac{z_1}{a}\,\frac{\text{d}z'}{\text{d}s}\ ;$$

ou, en vertu de l'équation (9)

$$\text{Cos.}\varphi=\frac{c}{a}\ ;$$

d'où il suit que *le fil est toujours également incliné sur la surface de la sphère.*

L'équation $a\text{Cos.}\varphi=c$ signifie que c est la projection, sur la direction du fil, du rayon qui passe par son extrémité, et que par conséquent la sphère intercepte sur tous les élémens de la courbe cherchée des cordes constantes $2c$. Soit r la perpendiculaire abaissée de l'origine sur l'un de ces élémens, on aura visiblement

$$r=\sqrt{a^2-c^2}\ ;$$

ainsi, *les élémens d'une courbe à double courbure dont la développante se trouve sur une sphère donnée, sont tous tangens à une même sphère concentrique à la première.*

Si l'on substitue dans l'équation (9) les valeurs (1), on obtient

$$\left(x'-s\,\frac{\text{d}x'}{\text{d}s}\right)\frac{\text{d}x'}{\text{d}s}+\left(y'-s\,\frac{\text{d}y'}{\text{d}s}\right)\frac{\text{d}y'}{\text{d}s}+\left(z'-s\,\frac{\text{d}z'}{\text{d}s}\right)\frac{\text{d}z'}{\text{d}s}=\text{C}\ ;$$

ou en développant et réduisant

$$x'\,\frac{\text{d}x'}{\text{d}s}+y'\,\frac{\text{d}y'}{\text{d}s}+z'\,\frac{\text{d}z'}{\text{d}s}-s=c\ ;$$

quarrant les deux membres de celle-ci, et retranchant ensuite l'équation (8), il vient

$$(x'^2+y'^2+z'^2)-\left(x'\frac{dx'}{ds}+y'\frac{dy'}{ds}+z'\frac{dz'}{ds}\right)^2=a^2-c^2 \ .$$

En remplaçant a^2-c^2 par r^2, ds^2 par $dx'^2+dy'^2+dz'^2$, cette équation deviendra

$$(x'^2+y'^2+z'^2-r^2)(dx'^2+dy'+dx'^2)=(x'dx'+y'dy'+z'dz')^2 \ , \qquad (10)$$

qu'on pourra encore mettre sous cette autre forme

$$(x'dy'-y'dx')^2+(y'dz'-z'dy')^2+(z'dx'-x'dz')^2=r^2(dx'^2+dy'^2+dz'^2) \ .$$

C'est là conséquemment une des équations différentielles du premier ordre des courbes à double courbure cherchées.

Mettons présentement dans l'équation (5) les valeurs (1); nous aurons

$$\left(x'-s\frac{dx'}{ds}\right)dx_1+\left(y'-s\frac{dy'}{ds}\right)dy_1+\left(z'-s\frac{dz'}{ds}\right)dz_1=0 \ ,$$

qui, à cause de la relation (4), se réduit simplement à

$$x'dx_1+y'dy_1+x'dz_1=0 \ . \qquad (11)$$

Les équations (5) et (11) prouvent que le plan

$$xdx_1+ydy_1+zdz_1=0$$

contient les deux points (x_1, y_1, z_1) et (x', y', z'), et conséquemment le fil descripteur ; ce plan passe d'ailleurs par l'origine ; donc il n'est autre que le plan tangent à la surface conique ayant son sommet à l'origine et pour directrice la développée. En outre, ce plan est normal à la développante, comme il résulte immédiatement de la comparaison de son équation avec celles de la tangente à la développante qui sont

$$x-x_1=\frac{dx_1}{dz_1}(z-z_1)\ , \qquad y-y_1=\frac{dy_1}{dz_1}(z-z_1)\ ;$$

il existe conséquemment entre le cône dont il s'agit et la développante une relation telle que tout plan tangent au cône est normal à la développante et réciproquement.

Pour énoncer ce résultat d'une manière simple, supposons que l'on enveloppe un fil sur le périmètre d'une courbe tracée sur une sphère et qu'on le développe ensuite de manière qu'il ne sorte point de la surface sphérique et qu'il soit constamment tendu, auquel cas il se dirigera constamment suivant un arc de grand cercle tangent à cette courbe. L'extrémité du fil décrira visiblement une autre courbe située sur la sphère, et partout perpendiculaire à la direction du fil. On peut donner à cette dernière courbe le nom de *développante sphérique* de la première.

Cela posé, on voit que, *lorsque la développante d'une courbe est située sur une sphère, elle est en même temps la développante sphérique de la ligne de pénétration de la surface de la sphère par le cône ayant son centre pour sommet et la développée non sphérique pour directrice.*

La développée jouit, sur le cône dont il vient d'être question, d'une propriété remarquable : elle est, sur cette surface, *la plus courte ligne entre deux de ses points*, ou, en d'autres termes, elle se transforme en une ligne droite lorsqu'on développe ce cône sur un plan. En effet, on fait voir, dans le calcul des variations (*), que, si une surface a pour équation différentielle

$$z=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y\ ,$$

les équations de la ligne la plus courte sur cette surface seront

---

(*) Voy. tom. XIII, pag. 87.

J. D. G.

$$\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+p\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=0\ ,\qquad \mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+q\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=0\ ,$$

dont le système satisfait à l'équation différentielle de la surface dont il s'agit. Si cette surface est un cône ayant son sommet à l'origine, il existera, comme l'on sait, entre les coefficiens différentiels p et q, la relation

$$px+qy=z\ ;$$

éliminant p et q entre ces trois équations, on trouve

$$x\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+y\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+z\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=0\ ;$$

or, il est facile de voir que les courbes de développement sphérique satisfont à cette équation; car, en substituant dans l'équation (11) les formules (2), il vient

$$x'\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s}+y'\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+z'\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s}=0\ .$$

Si l'on suppose que le centre de la sphère soit situé à l'infini, cette surface dégénèrera en un plan et le cône en un cylindre qui lui sera perpendiculaire; on aura ainsi les deux premiers résultats énoncés à la pag. 254 du présent volume.

S'il s'agissait de trouver, sur une surface donnée

$$z=\mathrm{f}(x,y)\ ,$$

les courbes à développantes sphériques, il faudrait joindre à cette équation son équation différentielle

$$\mathrm{d}z=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y\ ,$$

et l'équation de condition

$$(x^2+y^2+z^2-r^2)(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)=(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)^2\ ; \quad (12)$$

éliminant une des variables et sa différentielle entre ces trois équations, on aura l'équation différentielle du premier ordre de la projection des lignes cherchées sur l'un des plans coordonnés.

Appliquons ce procédé au cylindre droit à base circulaire dont l'équation est

$$x^2+y^2=R^2\ ,$$

et, pour simplifier, posons $a=r$, ce qui correspond au cas où la direction du fil est tangente à la sphère, lieu du développement.

En retranchant cette équation de celle de la sphère

$$x^2+y^2+z^2=r^2\ ,$$

on trouve

$$z^2=r^2-R^2 \quad \text{d'où} \quad z=\pm\sqrt{r^2-R^2}\,,$$

ces valeurs de z sont les distances des plans des cercles de pénétration des deux surfaces au plan des xy. Soit fait $r^2-R^2=b^2$.

Si l'on différentie l'équation du cylindre, on trouve

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0 \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2=\frac{R^2\mathrm{d}x^2}{R^2-x^2}\ ,$$

substituant dans l'équation (12), il vient, en remplaçant r^2-R^2 par b^2

$$(z^2-b^2)\left(\frac{R^2\mathrm{d}x^2}{R^2-x^2}+\mathrm{d}z^2\right)=z^2\mathrm{d}z^2\ ,$$

puis, en séparant les variables,

$$\frac{R^2\mathrm{d}x^2}{R^2-x^2}=\frac{b^2\mathrm{d}z^2}{z^2-b^2}$$

ou bien en extrayant la racine quarrée et supposant que les variables x et z ne croissent pas en même temps.

$$-\frac{R\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2-x^2}}=\frac{b\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-b^2}}\ ;$$

équation dont l'intégrale est

$$R\text{Arc.}\left(\text{Cos.}=\frac{x}{R}\right)=b\text{Log.}(z+\sqrt{x^2-b^2})+\text{Const.}$$

Pour déterminer la constante, supposons que le développement commence au point $x=R$, $y=0$, $z=b$; ce qui donne

$$0=b\text{Log.}b+\text{Const.}$$

et en retranchant,

$$R\text{Arc.}\left(\text{Cos.}=\frac{x}{R}\right)=b.\text{Log.}\left(\frac{z+\sqrt{z^2-b^2}}{b}\right)\ ;$$

d'où l'on tire aisément

$$z+\sqrt{z^2-b^2}=b.e.^{\frac{R}{b}\text{Arc.}\left(\text{Cos.}=\frac{x}{R}\right)}\ ;$$

cette équation peut se transformer en celle-ci

$$z-\sqrt{z^2-b^2}=b.e^{-\frac{R}{b}\text{Arc.}\left(\text{Cos.}=\frac{x}{R}\right)},$$

d'où en ajoutant,

$$z=\frac{b}{2}\left\{e^{+\frac{R}{b}\text{Arc.}\left(\text{Cos.}=\frac{x}{R}\right)}+e^{-\frac{R}{b}\text{Arc.}\left(\text{Cos.}=\frac{x}{R}\right)}\right\}$$

c'est l'équation de la projection de la courbe cherchée sur le plan des xz.

On reconnaît facilement la nature de cette courbe en développant le cylindre sur un plan. Supposons que ce plan ait pour équation $x=R$ et que le développement s'effectue à partir de l'arête opposée à celle de contact; soient pris pour axes cette dernière arête et la trace du plan tangent sur celui des xy; soient u et t les coordonnées respectivement relatives à ces axes, on aura

$$u=z\ , \quad t=R\,\text{Arc.}\left(\text{Cos.}=\frac{x}{R}\right);$$

d'où, en substituant dans l'équation précédente,

$$u=\frac{b}{2}\left(e^{+\frac{t}{b}}+e^{-\frac{t}{b}}\right);$$

c'est l'équation de la courbe développée. On voit qu'elle appartient à une chaînette formée par un fil uniformément pesant, parfaitement flexible et inextensible, dont le rayon de courbure, au point le plus bas, est égal à b (*).

De là résulte ce curieux théorème: *Si l'on fixe à deux des points de la surface d'un cylindre droit, dont l'axe est vertical, les deux extrémités d'un fil uniformément pesant, parfaitement flexible et inextensible, qui n'éprouve aucun frottement de la part de la surface du cylindre, ce fil abandonné ainsi à l'action de la pesanteur, se pliera sur ce cylindre suivant une courbe à double courbure dont les développantes appartiendront à des surfaces sphériques.*

J. D. G.

(*) Voy. *Annales*, tom. 1, pag. 58.

P. S. Tous les plans tangens au cylindre dont il vient d'être question coupent la sphère sur laquelle est située une quelconque des développantes suivant des cercles égaux auxquels sont tangens les divers élémens de la chaînette cylindrique ; et il est clair qu'il devra encore en être de même après le développement du cylindre sur le plan tangent conduit par un des points de cette courbe.

Or, de là résulte un moyen fort simple de mener une tangente à la chaînette cylindrique développée. Soient AM cette courbe, (fig. 1), A son point le plus bas, AD sa tangente en ce point, BC une parallèle à cette tangente, qui en soit distante d'une quantité AB, égale au rayon de courbure de la courbe en ce point A ; et soit M le point par lequel on se propose de mener une tangente. Par ce point on abaissera une perpendiculaire sur les deux parallèles AD et BC, les coupant en D et C. Du point C comme centre, et avec CD pour rayon, on décrira un cercle ; et la tangente MN à ce cercle sera aussi tangente à la courbe.

On peut remarquer que l'arc AM est égal à la tangente MN.

Il résulte de cette construction que la chaînette cylindrique développée est la développée d'une courbe dont les tangentes CN, terminées à BC, sont constantes.

On peut aussi démontrer, par le calcul, que l'aire ABCM a pour mesure $AB \times AM = AB \times MN$, et que conséquemment cette aire est double de celle du triangle rectangle MCN. On s'assurera aussi que, si l'on prolonge les normales au-dessous de la chaînette de quantités égales aux rayons de courbure correspondans, les extrémités des prolongemens se trouveront toutes situées sur l'horizontale BC. On trouvera enfin que la tension absolue du fil, en l'un quelconque de ses points M, est égale au poids du fil de même nature d'une longueur égale à MC.