ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

A. DUPRÉ

Analyse algébrique. Note sur un symptôme d'existence des racines imaginaires, dans une équation de degré quelconque

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 68-71
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__68_0>

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

Note sur un symptôme d'existence des racines imaginaires, dans une équation de degré quelconque ;

Par M. A. Dupré, Elève de l'Ecole préparatoire du Collége de Louis-le-Grand.

Soit l'équation en x

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\dots\dots+A_{n-1}x^{m-n+1}+A_nx^{m-n}+A_{n+1}x^{m-n-1}+\dots$$
$$+A_{m-2}x^2+A_{m-1}x+A_m=X=0\,; \quad (1)$$

on sait que l'équation

$$y=X \qquad (2)$$

est celle d'une courbe qui a un cours continu et indéfini, dans le sens des x, de part et d'autre de l'axe des y; et que les segmens qu'elle détermine sur l'axe des x, comptés de l'origine sont les racines réelles de la proposée. On sait de plus qu'une parallèle quelconque à l'axe des y, parallèle qui coupe nécessairement la courbe, ne saurait la couper en plus d'un point.

Il suit de là qu'entre deux intersections consécutives quelconques, il y aura toujours un point de la courbe, au moins, pour lequel la tangente sera parallèle à l'axe des x, et dont l'abscisse sera conséquemment racine de l'équation

$$mA_0x^{m-1}+(m-1)A_1x^{m-2}+(m-2)A_2x^{m-3}+\ldots+2A_{m-2}x+A_{m-1}=X'=0\ ; \quad (3)$$

d'où il suit que, si la proposée a k racines réelles, l'équation (3) en aura $k-1$, au moins.

Donc, si la proposée a ses m racines réelles, l'équation (3) devra avoir $m-1$ racines réelles, au moins; et puisqu'elle est du $(m-1)^{ième}$ degré seulement, elle n'aura point de racines imaginaires. Donc, à l'inverse, si cette équation (3) a des racines imaginaires, la proposée devra en avoir également. Il est aisé de voir d'ailleurs que la présence des racines égales dans la proposée n'altèrerait en rien la vérité de cette proposition. Il arriverait seulement que toutes ces racines, excepté une de chaque sorte, se reproduiraient dans l'équation (3).

Or, comme on peut raisonner sur chaque dérivée, par rapport à celle qui la précède immédiatement, comme nous venons de le faire de l'équation (3) par rapport à la proposée, on peut établir en principe que, *lorsqu'une équation a toutes ses racines réelles, toutes ses dérivées, jusqu'à la dernière, ont aussi toutes leurs racines réelles ;* d'où il suit que, *si une seule des dérivées d'une équation a des racines imaginaires, toutes ses dérivées supérieures, et par suite la proposée elle-même, auront aussi des racines imaginaires.* Cette remarque, dit-on, a déjà été faite par M. Cauchy, dans un mémoire dont nous n'avons pas eu connaissance.

Cela posé, la $(m-2)^{ième}$ dérivée de l'équation proposée est, en multipliant par *deux* et réduisant,

$$m(m-1)A_0x^2+2(m-1)A_1x+2A_2=0\ , \qquad (4)$$

laquelle aura ses racines imaginaires si l'on a

$$(m-1)^2A_1^2-2m(m-1)A_0A_2<0$$

ou, plus simplement,

$$(m-1)A_1^2 < 2mA_0A_2\,, \qquad (5)$$

donc, dans ce cas aussi, la proposée aura des racines imaginaires.

Si, dans la proposée, on change x en $\frac{1}{y}$, elle deviendra, en chassant les dénominateurs et ordonnant,

$$A_m y^m + A_{m-1}y^{m-1} + A_{m-2}y^{m-2} + \ldots\ldots + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0\,; \qquad (6)$$

et, d'après ce qui vient d'être dit, cette dernière équation aura nécessairement des racines imaginaires si l'on a

$$(m-1)A^2_{m-1} < 2mA_mA_{m-2}\,; \qquad (7)$$

mais, les racines imaginaires sont nécessairement en même nombre dans l'équation (6) et dans la proposée; donc, si cette dernière équation a lieu, la proposée aura nécessairement des racines imaginaires.

Soit prise présentement la $(m-n-1)^{ième}$ dérivée de la proposée; en la modifiant convenablement, elle se terminera ainsi

$$+(m-n+1)(m-n)A_{n-1}x^2 + 2(m-n)A_nx + 2A_{n+1} = 0\,;$$

mais, d'après le résultat (7), si elle se terminait ainsi,

$$+A'_{m-2}x^2 + A'_{m-1}x + A'_m = 0$$

elle aurait des racines imaginaires, et conséquemment la proposée en aurait aussi, si l'on avait

$$(m-1)A'^2_{m-1} < 2mA'_mA'_{m-2}\,;$$

faisant donc

$$A'_{m-2}=(m-n+1)(m-n)A_{n-1}\ ,$$

$$A'_{m-1}=2(m-n)A_n\ ,$$

$$A'_m=2A_{n+1}\ ,$$

il viendra, en substituant et réduisant,

$$(m-1)(m-n)A^2_n<m(m-n+1)A_{n-1}A_{n+1}\ ; \qquad (8)$$

de sorte que, si une telle relation a lieu entre trois termes consécutifs quelconques de la proposée, cette équation aura nécessairement des racines imaginaires.

Si l'on a $A^2_n<A_{n-1}A_{n+1}$, à plus forte raison la relation (8) aura-t-elle lieu ; donc la proposée aura des racines imaginaires (*) ; et, comme cette dernière inégalité est nécessairement satisfaite, si l'on a $A_n=0$ et A_{n-1}, A_{n+1} de mêmes signes, on retombe ainsi sur sa remarque déjà faite par Descartes, savoir : que toute équation dans laquelle il manque un terme, entre deux autres de mêmes signes, a nécessairement des racines imaginaires.

(*) Cette proposition a déjà été établie à la page 385 du XVI.e volume du présent recueil, où l'on a prouvé, en outre, qu'autant de fois cette relation avait lieu entre trois termes consécutifs d'une équation, autant au moins l'équation avait de couples de racines imaginaires. Il serait intéressant de savoir s'il en est de même à l'égard de la relation (8), dont celle-là n'est qu'un cas particulier.

J. D. G.