ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

Géométrie de situation. Démonstration de quelques théorèmes sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 89-98

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__89_0>

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Démonstration de quelques théorèmes sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

En désignant généralement par $f_n(x,y)$, une fonction rationnelle, entière et homogène de n dimensions en x et y, l'équation de toute ligne algébrique du $m.^{ième}$ ordre pourra être écrite comme il suit :

$$f_m(x,y)+f_{m-1}(x,y)+\ldots\ldots+f_2(x,y)+f_1(x,y)+1=0 \ . \quad (1)$$

Si l'on veut passer aux coordonnées polaires, en prenant pour pôle l'origine des coordonnées, qu'on peut toujours supposer un quelconque des points du plan de la courbe, il suffira de poser

$$x=tr \ ; \qquad y=ur \ ; \qquad (2)$$

r étant le rayon vecteur et t, u les cosinus des angles variables formés par ce rayon avec les deux axes ; cosinus liés entre eux par la relation

$$t^2+u^2=1 \ . \qquad (3)$$

L'équation deviendra ainsi

$$r^m f_m(t,u)+r^{m-1}f_{m-1}(t,u)+\ldots\ldots+r^2f_2(t,u)+rf_1(t,u)+1=0\;;\qquad(4)$$

et donnera m valeurs pour le rayon vecteur, à chaque direction qu'on voudra lui faire prendre ; ce qui prouverait, s'il en était besoin, qu'une ligne du $m.^{ieme}$ ordre ne saurait couper une droite en plus de m points ; et que conséquemment toute courbe qui coupe une droite en m points est une ligne du $m.^{ieme}$ ordre au moins.

Pour que le rayon vecteur soit tangent à la courbe, il faut que l'équation (4) donne tout au moins deux valeurs égales pour r, et que conséquemment la dérivée de son premier membre, prise par rapport à cette lettre, soit nulle ; ce qui donne

$$mr^{m-1}f_m(t,u)+(m-1)r^{m-2}f_{m-1}(t,u)+\ldots\ldots+2rf_2(t,u)+f_1(t,u)=0\;;\ (5)$$

équation qui, pour les points de contact des tangentes issues de l'origine, doit avoir lieu en même temps que l'équation (4), et qui, jointe à elle, en ayant égard à la relation (3), servirait à les déterminer tous ; c'est-à-dire, que l'équation (5) est l'équation polaire d'une courbe qui coupe la proposée en ses points de contact.

Mais, quand un système de points est donné par deux courbes dont ces points sont les intersections, on peut toujours, dans la recherche de ces mêmes points, remplacer l'une d'elles par une autre courbe, dont l'équation serait une combinaison quelconque des leurs. Or, en prenant la somme des produits respectifs des équations (4) et (5), par m et $-r$, il vient, en réduisant,

$$r^{m-1}f_{m-1}(t,u)+2r^{m-2}f_{m-2}(t,u)+\ldots\ldots+(m-2)r^2f_2(t,u)+(m-1)rf_1(t,u)+m=0\;;\ (6)$$

de sorte que c'est là l'équation polaire d'une courbe qui, comme celle qui est donnée par l'équation (5), coupe la proposée en ses points de contact avec les tangentes menées à cette dernière par l'origine.

Si présentement on veut repasser aux coordonnées rectangulaires, il faudra faire (2)

$$t=\frac{x}{r}\;,\qquad u=\frac{y}{r}\;,$$

ce qui donnera, en substituant dans l'équation (6),

$$f_{m-1}(x,y)+2f_{m-2}(x,y)+\ldots+(m-2)f_2(x,y)+(m-1)f_1(x,y)+m=0\;; \quad (7)$$

équation du $(m-1)^{ieme}$ degré seulement, appartenant à une courbe qui coupe la ligne du $m.^{ieme}$ ordre donnée par l'équation (1) à ses points de contact avec les tangentes menées à celle-ci par l'origine des coordonnées.

En se rappelant donc qu'ici l'origine est un quelconque des points du plan de la courbe proposée, on en conclura le théorème suivant :

THÉORÈME I. Les points de contact d'une ligne du $\mathrm{m}.^{ieme}$ *ordre avec les tangentes à cette courbe, issues d'un même point de son plan, sont tous situés sur une seule et même ligne du* $(\mathrm{m}-1)^{ieme}$ *ordre au plus.*

En désignant généralement par $f_n(x,y,z)$, une fonction rationnelle, entière et homogène de n dimensions en x, y, z, l'équation de toute surface algébrique du $m.^{ieme}$ ordre pourra être écrite comme il suit :

$$f_m(x,y,z)+f_{m-1}(x,y,z)+\ldots\ldots+f_2(x,y,z)+f_1(x,y,z)+1=0\;. \quad (1)$$

Si l'on veut passer aux coordonnées polaires, en prenant pour pôle l'origine des coordonnées, qu'on peut toujours supposer quelconque dans l'espace, il suffira de poser

$$x=tr\;,\quad y=ur\;,\quad z=vr\;; \qquad (2)$$

r étant le rayon vecteur et t, u, v les cosinus des angles variables que fait sa direction avec les trois axes, cosinus liés entre eux par la relation

$$t^2+u^2+v^2=1 . \qquad (3)$$

L'équation deviendra ainsi

$$r^m f_m(t,u,v)+r^{m-1}f_{m-1}(t,u,v)+\dots+r^2f_2(t,u,v)+rf_1(t,u,v)+1=0 , \quad (4)$$

et donnera m valeurs pour le rayon vecteur, à chaque direction qu'on voudra lui faire prendre ; ce qui prouverait, s'il en était besoin, qu'une surface du $m.^{ieme}$ ordre ne saurait couper une droite en plus de m points ; et que conséquemment toute surface qui coupe une droite en m points est du $m.^{ieme}$ ordre au moins.

Pour que le rayon vecteur soit tangent à cette surface, il faut que l'équation (4) donne tout au moins deux valeurs égales pour r, et que conséquemment la dérivée de son premier membre, prise par rapport à cette lettre, soit nulle ; ce qui donne

$$mr^{m-1}f_m(t,u,v)+(m-1)r^{m-2}f_{m-1}(t,u,v)+\dots+2rf_2(t,u,v)+f_1(t,u,v)=0 ; \quad (5)$$

équation qui, pour les points de contact des tangentes issues de l'origine, doit avoir lieu en même temps que l'équation (4), et qui, jointe à elle, en ayant égard à la relation (3), servirait à les déterminer tous ; c'est-à-dire, que l'équation (5) est l'équation polaire d'une surface courbe qui coupe la proposée suivant ses lignes de contact avec la surface conique circonscrite qui aurait son sommet à l'origine.

Mais, quand des lignes sont données dans l'espace par deux surfaces dont elles sont l'intersection, on peut toujours, dans la recherche de ces mêmes lignes, remplacer l'une d'elles par une autre surface dont l'équation serait une combinaison quelconque des leurs. Or, en prenant la somme des produits respectifs des équations (4) et (5) par m et $-r$, il vient, en réduisant,

$$r^{m-1}f_{m-1}(t,u,v)+2r^{m-2}f_{m-2}(t,u,v)+\ldots+(m-2)r^2f_2(t,u,v)+(m-1)rf_1(t,u,v)+m=0\,; \quad (6)$$

de sorte que c'est là l'équation polaire d'une surface qui, comme celle qui est donnée par l'équation (5), coupe la proposée suivant ses lignes de contact avec la surface conique circonscrite à cette dernière dont le sommet est à l'origine.

Si présentement on veut repasser aux coordonnées rectangulaires, il faudra faire (2)

$$t=\frac{x}{r}\,,\qquad u=\frac{y}{r}\,,\qquad v=\frac{z}{r}\,,$$

ce qui donnera, en substituant dans l'équation (6),

$$f_{m-1}(x,y,z)+2f_{m-2}(x,y,z)+\ldots\ldots+(m-2)f_2(x,y,z)+(m-1)f_1(x,y,z)+m=0\,; \quad (7)$$

équation du $(m-1)^{ieme}$ degré seulement, appartenant à une surface qui coupe la surface du $m.^{ieme}$ ordre donnée par l'équation (1), suivant ses lignes de contact avec la surface conique circonscrite à celle-ci dont le sommet est à l'origine des coordonnées.

En se rappelant donc qu'ici l'origine est un quelconque des points de l'espace, on en conclura le théorème suivant:

THÉORÈME II. Les lignes de contact d'une surface du m.^{ieme} *ordre avec toute surface conique circonscrite sont toutes situées sur une seule et même surface du* (m—1)^{ieme} *ordre au plus.*

Ce théorème et le précédent sont dus tous deux à M. Vallès (*Annales*, tom. XVI, pag. 315), et nous avons eu uniquement en vue d'en donner une démonstration qui pût être introduite dans l'enseignement élémentaire.

Soient une ligne du $m.^{ieme}$ ordre et une droite, données respectivement par les équations

$$M=0\ ,\qquad y=ax\ .$$

dont les différentielles respectives sont

$$\frac{dM}{dx}+\frac{dM}{dy}\,\frac{dy}{dx}=0\ ,\qquad \frac{dy}{dx}=a\ .$$

En éliminant $\frac{dy}{dx}$ entre ces différentielles, l'équation résultante

$$\frac{dM}{dx}+a\frac{dM}{dy}=0\ ,\qquad (\alpha)$$

du $(m-1)^{ieme}$ degré seulement, sera celle d'une courbe coupant la proposée en tous ceux de ses points par lesquels on peut lui mener des tangentes parallèles à la droite donnée ; on a donc le théorème suivant que l'on pourrait aussi déduire du *Théorème I*, comme l'a fait M. Vallès, à l'endroit cité.

THÉORÈME III. Les points de contact d'une ligne du m.^{ieme} *ordre avec les tangentes menées à cette courbe, parallèlement à une droite donnée quelconque, appartiennent tous à une seule et même ligne du* $(m-1)^{ieme}$ *ordre au plus.*

On peut aussi satisfaire à l'équation (α), quel que soit a, en posant, à la fois

$$\frac{dM}{dx}=0\ ,\qquad \frac{dM}{dy}=0\ ;$$

équations qui appartiennent à deux lignes du $(m-1)^{ieme}$ ordre, se coupant en $(m-1)^2$ points au plus ; ce qui donne cet autre théorème :

THÉORÈME IV. Les lignes du $(m-1)^{ieme}$ *ordres auxquelles appartiennent les diverses séries de points de contact d'une même ligne du* m.^{ieme} *ordre, avec des systèmes de tangentes à cette courbe parallèles à des droites arbitraires, passent toutes par les mêmes* $(m-1)^2$ *points fixes.*

Soient une surface du $m.^{ieme}$ ordre et une droite, données respectivement par les équations

$$M=0\ ,\qquad x=az\ ,\qquad y=bz\ ,$$

dont les différentielles respectives sont

$$\frac{dM}{dx}\frac{dx}{dz}+\frac{dM}{dy}\frac{dy}{dz}+\frac{dM}{dz}=0\ ,\qquad \frac{dx}{dz}=a,\qquad \frac{dy}{dz}=b\ .$$

En éliminant entre ces différentielles $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, l'équation résultante

$$a\frac{dM}{dx}+b\frac{dM}{dy}+\frac{dM}{dz}=0\ ,\qquad (\alpha\alpha)$$

du $(m-1)^{ieme}$ degré seulement, sera celle d'une surface coupant la proposée suivant les lignes par tous les points desquelles on peut lui mener des tangentes parallèles à la droite donnée ; on a donc le théorème suivant que l'on pourrait aussi déduire du *Théorème II*, comme l'a fait M. Vallès, à l'endroit cité.

THÉORÈME V. Les lignes de contact d'une surface du m.^{ieme} *ordre avec la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à une droite donnée quelconque, appartiennent toutes à une seule et même surface du* $(m-1)^{ieme}$ *ordre au plus.*

On peut aussi satisfaire à l'équation $(\alpha\alpha)$, quels que soient a et b, en posant à la fois

$$\frac{dM}{dx}=0\ ,\qquad \frac{dM}{dy}=0\ ,\qquad \frac{dM}{dz}=0\ ;$$

équations qui appartiennent à trois surfaces du $(m-1)^{ieme}$ ordre se coupant en $(m-1)^3$ points au plus ; ce qui donne cet autre théorème :

THÉORÈME VI. Les surfaces du $(m-1)^{ieme}$ *ordre auxquelles appartiennent les diverses séries des lignes de contact d'une même* *surface du* m.^{ieme} *ordre avec des surfaces cylindriques circonscrites, ayant leurs génératrices parallèles à des droites arbitraires, passent toutes par les mêmes* $(m-1)^3$ *points fixes.*

Si, sans laisser la droite donnée tout-à-fait indéterminée, on l'assujettit à se mouvoir dans un plan fixe passant par l'axe des z; c'est-à-dire, dans un plan fixe quelconque, en supposant l'équation de ce plan

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B},$$

on devra avoir

$$\frac{a}{A}=\frac{b}{B}.$$

Tirant de cette dernière équation la valeur de b, pour la substituer dans l'équation $(\alpha\alpha)$, celle-ci deviendra

$$\left(A\frac{dM}{dx}+B\frac{dM}{dy}\right)a+A\frac{dM}{dz}=0.$$

Cette équation est satisfaite, quel que soit a, en posant, à la fois,

$$A\frac{dM}{dx}+B\frac{dM}{dy}=0, \qquad \frac{dM}{dz}=0;$$

équations qui appartiennent à deux surfaces du $(m-1)^{ieme}$ ordre, et conséquemment à la courbe fixe à double courbure suivant laquelle ces deux surfaces se pénètrent. On a donc ce nouveau théorème :

THÉORÈME VII. Les surfaces du $(m-1)^{ieme}$ *ordre auxquelles appartiennent les diverses séries de lignes de contact d'une même surface du* m.^{ieme} *ordre, avec des surfaces cylindriques circonscrites, ayant leurs génératrices parallèles à des droites tracées arbitrairement dans un même plan quelconque, passent toutes par une seule et même courbe à double courbure.*

Ces théorèmes ainsi démontrés, il sera facile, soit par la théorie des polaires réciproques, soit par celle des projections, d'en déduire les suivans, que nous nous contenterons d'énoncer.

THÉORÈME VIII. Les tangentes menées à une ligne du m.$^{\text{ieme}}$ *ordre, par ses intersections avec une même droite, sont toutes tangentes à une seule et même ligne du* (m—1)$^{\text{ieme}}$ *ordre au plus.*

THÉORÈME IX. Les surfaces développables circonscrites à une surface du m.$^{\text{ieme}}$ *ordre, suivant ses intersections avec un même plan, sont toutes circonscrites à une seule et même surface du* (m—1)$^{\text{ieme}}$ *ordre au plus* (*).

THÉORÈME X. Les lignes du (m—1)$^{\text{ieme}}$ *ordre auxquelles sont tangentes les tangentes menées à une même ligne du* m.$^{\text{ieme}}$ *ordre, par ses points d'intersection avec des droites parallèles, ou concourant en un même point, ont toutes les* (m—1)^2 *mêmes tangentes communes.*

THÉORÈME XI. Les surfaces du (m—1)$^{\text{ieme}}$ *ordre auxquelles sont circonscrites les surfaces développables circonscrites à une même surface du* m.$^{\text{ieme}}$ *ordre, suivant ses intersections avec des plans parallèles à une même droite, ou concourant en un même point ont toutes les mêmes* (m—1)^3 *plans tangens communs.*

THÉORÈME XII. Les lignes du (m—1)$^{\text{ieme}}$ *ordre auxquelles appartiennent les points de contact d'une même ligne du* m.$^{\text{ieme}}$ *ordre avec les systèmes de tangentes menées à cette courbe, par les différens points d'une même droite, passent toutes par les* (m—1)^2 *mêmes points.*

THÉORÈME XIII. Les surfaces du (m—1)$^{\text{ieme}}$ *ordre auxquelles appartiennent les lignes de contact d'une même surface du* m.$^{\text{ieme}}$ *ordre avec des surfaces coniques circonscrites dont les sommets*

(*) Ces deux théorèmes avaient déjà été donnés par M. Gergonne (*Annales*, tom. XVII, pag. 225 et 241).

sont dans un même plan, passent toutes par les $(m-1)^3$ *mêmes points.*

THÉORÈME XIV. Les surfaces du $(m-1)^{ieme}$ *ordre auxquelles sont circonscrites les surfaces développables, circonscrites elles-mêmes à une même surface du* $m.^{ieme}$ *ordre, suivant ses intersections avec des plans parallèles, ou se coupant suivant la même droite, sont toutes inscriptibles à une seule et même surface développable.*

THÉORÈME XV. Les surfaces du $(m-1)^{ieme}$ *ordre auxquelles appartiennent les lignes de contact d'une même surface du* $m.^{ieme}$ *ordre avec des surfaces coniques circonscrites dont les sommets appartiennent à une même droite, passent toutes par une seule et même courbe à double courbure.*