ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Analyse algébrique. Note sur un symptôme d'existence de racines imaginaires, dans les équations algébriques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 124-126
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__124_0>

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

Note sur un symptôme d'existence de racines imaginaires, dans les équations algébriques;

Par M. Gergonne.

Il a été démontré, dans le XVI.e volume du présent recueil (pag. 385), qu'*autant on rencontre, dans une équation algébrique, de séries de trois termes consécutifs formant une proportion continue par quotiens, autant l'équation a de couples de racines imaginaires au moins.*

Dans une lettre qu'il nous a fait l'honneur de nous adresser, il y a déjà un peu de temps, M. Dupré, élève distingué de l'Ecole normale du collége royal de Louis-le-Grand, et qui, comme on l'a vu (tom. XVIII, pag. 68), s'est aussi occupé des symptômes d'existence des racines imaginaires dans les équations, objecte contre cette proposition qu'il s'ensuivrait qu'une équation complète du troisième degré, dont les quatre termes formeraient une progression par quotiens, devrait avoir quatre racines imaginaires.

Mais il résulte clairement de la démonstration même, donnée à l'endroit cité, que, dans le cas de plusieurs séries de trois termes consécutifs formant une proportion continue par quotiens, la proposition ne saurait être vraie qu'autant que les plus voisines de ces séries de trois termes consécutifs n'auraient au plus qu'un terme commun, ce qui ne saurait avoir lieu dans le troisième degré. L'équation du degré le moins élevé, dans laquelle on pourra rencontrer deux séries *disjointes* de trois pareils termes, sera donc une équation du quatrième degré. Elle sera de la forme

$$a^2x^4+ax^3+x^2+bx+b^2=0\ ,$$

qui revient à

$$\left\{ax^2+\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{8ab-3}\right)x+b\right\}\left\{ax^2+\tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{8ab-3}\right)x+b\right\}=0\ ;$$

et qui a, en effet, ses quatre racines imaginaires.

M. Dupré, qui s'occupe aussi de recherches d'un ordre plus élevé, observe, dans la même lettre, qu'au lieu de réduire les fonctions elliptiques, comme on le fait ordinairement aux trois formes

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{R}\ ,\quad \int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a)R}\ ,\quad \int\frac{x^2\mathrm{d}x}{R}\ ;$$

où $R=\sqrt{A+Bx^2+Cx^4}$, on pourrait les réduire seulement aux deux dernières formes, attendu que la première n'est qu'un cas particulier de la seconde. On a, en effet, comme le prouve la différentiation,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{R}=2\sqrt{\frac{A}{C}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+\sqrt{\frac{A}{C}}\right)R}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{AC}-B}}.\mathrm{Arc.}\left(\mathrm{Sin.}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\frac{A}{C}}-\frac{B}{C}}\cdot\frac{x}{x^2+\sqrt{\frac{A}{C}}}}\right),$$

qui donnera $\int \frac{dx}{R}$, lorsqu'on saura intégrer $\frac{dx}{\left(x^2 + \sqrt{\frac{A}{C}}\right) R}$,

qui rentre dans $\frac{dx}{(x^2 + a) R}$.