GERGONNE

Géométrie élémentaire. Mesure du volume du tétraèdre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 151-155
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__151_0>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Mesure du volume du tétraèdre;

Par M. Gergonne.

Soit un triangle isocèle ACB dont la base AB soit quelconque et la hauteur égale à une longueur donnée H. Soit construite une suite indéfinie d'autres triangles isocèles $A_1C_1B_1$, $A_2C_2B_2$, $A_3C_3B_3$, ... tels que les sommets du premier soient les milieux des côtés du triangle ACB, et que les sommets de chacun des autres soient les milieux des côtés de celui qui le précède immédiatement. Il a déjà été remarqué (*Annales*, tom. XVII, pag. 151), et il est d'ailleurs facile de voir que ces triangles, tous semblables et continuellement décroissans, tendront sans cesse à se réduire à un point unique P, tellement situé sur CC_1 ou H qu'on aura $C_1P=\frac{CC_1}{3}=\frac{H}{3}$.

Dans la série des longueurs

$$CC_1\,,\;C_1C_2\,,\;C_2C_3\,,\;C_3C_4\,,\;C_4C_5\,,\;\ldots\ldots$$

chaque longueur sera moitié de celle qui la précède immédiatement, et, comme la première est égale à H, on aura

$$C_1C_2=\frac{H}{2}\;,\quad C_2C_3=\frac{H}{4}\;,\quad C_3C_4=\frac{H}{8}\;,\quad C_4C_5=\frac{H}{16}\;,\;\ldots\ldots\;;$$

on aura donc, d'après cela,

$$C_1C_3=C_1C_2-C_2C_3=\frac{H}{4}\;,$$

$$C_3C_5=C_3C_4-C_4C_5=\frac{H}{16},$$

$$C_5C_7=C_5C_6-C_6C_7=\frac{H}{64},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

or

$$C_1P=\frac{H}{3}=C_1C_3+C_3C_5+C_5C_7+C_7C_9+\ldots\ldots;$$

donc, en subtituant

$$\frac{H}{3}=\frac{H}{4}+\frac{H}{16}+\frac{H}{64}+\frac{H}{256}+\frac{H}{1024}+\ldots\ldots \qquad (1)$$

Cela posé, soit T un tétraèdre quelconque dont la base soit B et la hauteur H; on sait (voy. *Euclide* ou *M. Legendre*) qu'il peut être décomposé en deux prismes triangulaires équivalens et en deux tétraèdres égaux ; que chacun de ces prismes triangulaires a pour mesure $\frac{B}{4}\times\frac{H}{2}=\frac{BH}{8}$, de sorte que le volume total des deux est $B\times\frac{H}{4}$. Si donc on représente par T_1 chacun des tétraèdres qui, avec eux, forment le tétraèdre donné, on aura

$$T=B\times\frac{H}{4}+2T_1.$$

Si l'on désigne respectivement par B_1 et H_1 la base et la hauteur de chacun des tétraèdres T_1, et qu'on les décompose de la même manière, en désignant par T chacun des deux tétraèdres qui résultent de la décomposition de chacun d'eux, on aura de même

$$T_1=B_1\times\frac{H_1}{4}+2T_2;$$

et ainsi de suite; de sorte qu'on pourra écrire indéfiniment

$$T=B\times\frac{H}{4}+2T_1,$$

$$T_1=B_1\times\frac{H_1}{4}+2T_2;$$

$$T_2=B_2\times\frac{H_2}{4}+2T_3,$$

. . . .

En prenant la somme des produits respectifs de ces équations par 1, 2, 4, 8, ... et réduisant, il viendra

$$T=B\times\frac{H}{4}+2B_1\times\frac{H_1}{4}+4B_2\times\frac{H_2}{4}+8B_3\times\frac{H_3}{4}+\ldots,$$

ou bien

$$T=B\times\frac{H}{4}+4B_1\times\frac{H_1}{8}+16B_2\times\frac{H_2}{16}+64B_3\times\frac{H_3}{32}+\ldots;$$

mais on a

$$B=4B_1=16B_2=64B_3=\ldots\ldots;$$

donc

$$T=B.\left(\frac{H}{4}+\frac{H_1}{8}+\frac{H_2}{16}+\frac{H_3}{32}+\frac{H_4}{64}+\ldots\ldots\right);$$

et comme on a d'ailleurs

$$H_1=\frac{H}{2},\quad H_2=\frac{H}{4},\quad H_3=\frac{H}{8},\quad H_4=\frac{H}{16},\ \ldots\ldots$$

il viendra, en substituant,

$$T=B\left(\frac{H}{4}+\frac{H}{16}+\frac{H}{64}+\frac{H}{256}+\frac{H}{1024}+\ldots\ldots\right),$$

c'est-à-dire (1)

$$T = B \times \frac{H}{3};$$

on obtiendra donc le volume d'un tétraèdre en multipliant l'aire de sa base par le tiers de sa hauteur.

De la même manière qu'au moyen du triangle nous venons de démontrer que

$$\frac{H}{3} = \frac{H}{4} + \frac{H}{16} + \frac{H}{64} + \frac{H}{256} + \ldots\ldots;$$

on démontrera, à l'aide du tétraèdre, que

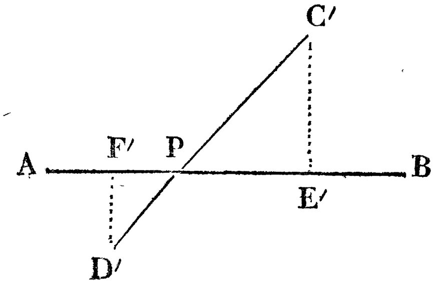
$$\frac{H}{8} = \frac{H}{9} + \frac{H}{81} + \frac{H}{729} + \frac{H}{6561} + \ldots\ldots$$

Il a été démontré, à la pag. 250 du précédent volume, que *le volume d'un tétraèdre est le sixième du produit de deux arêtes opposées, du sinus tabulaire de l'angle qu'elles forment entre elles et de leur perpendiculaire commune.*

M. Martinelli, cadet au corps-royal des Pontonniers à Modène, qui ne connaît pas sans doute la démonstration que nous rappelons ici, nous en a récemment adressé une qui, pour le fond, revient à celle-là; mais il nous en a en même temps communiqué une autre qui lui a été suggérée par M. le professeur Tramontini, et qui, à raison de son élégante simplicité, nous a paru ne devoir pas être passée sous silence. La voici :

On sait que deux arêtes opposées d'un tétraèdre sont toujours comprises dans deux plans parallèles, dont la distance est égale à la perpendiculaire commune entre ces deux droites.

Soit donc ABCD le tétraèdre dont il s'agit. Par les arêtes opposées AB et CD conduisons deux plans parallèles, et supposons que le premier de ces plans soit le plan même de la figure. Soit C'D' la projection de CD sur ce plan, si PQ est la perpendiculaire commune



aux arêtes opposées AB et CD, ses deux extrémités se projèteront en P à l'intersection de AB et C′D′.

Par AB et PQ soit conduit un plan; ce plan, perpendiculaire à celui de la figure, coupera le tétraèdre suivant un triangle AQB, que l'on pourra considérer comme base commune de deux autres tétraèdres, CAQB et DAQB, dont celui-là sera la somme. Leurs hauteurs CE et DF se projèteront suivant $C'E'=CE$ et $D'F'=DF$, toutes deux perpendiculaires à AB. L'aire de leur base commune AQB aura pour expression $\frac{1}{2}AB\times PQ$; de sorte qu'en représentant par T le volume du tétraèdre, on aura

$$T=\tfrac{1}{2}AB\times PQ\times\tfrac{1}{3}C'E'+\tfrac{1}{2}AB\times PQ\times\tfrac{1}{3}D'F'=\tfrac{1}{6}AB\times PQ\times(C'E'+D'F')\ ;$$

mais on a

$$C'E'=PC'Sin.(AB,CD)\ , \qquad D'F'=PD'Sin.(AB,CD)\ ;$$

d'où

$$C'E'+D'F'=(PC'+PD')Sin.(AB,CD)=C'D'Sin.(AB,CD)=CDSin.(AB,CD)\ ;$$

donc, en substituant

$$T=\tfrac{1}{6}AB\times CD\times PQ\times Sin.(AB,CD)\ .$$

Il pourrait arriver que le point P, au lieu de se trouver sur C′D′, se trouvât sur son prolongement. Pour plier la démonstration à ce cas, il ne s'agirait que de remplacer les sommes par des différences.