Questions résolues. Solution de deux des six problèmes de géométrie énoncés à la pag. 155 du précédent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 175-181
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__175_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution de deux des six problèmes de géométrie énoncés à la pag. 155 *du précédent volume ;*

Par un Abonné.

PROBLÈME I. Sur le plan d'un triangle donné décrire un cercle qui intercepte, sur les directions des trois côtés de ce triangle, des cordes égales à trois droites données ?

Solution. Comme il faut trois conditions pour déterminer un cercle sur un plan, on voit d'abord que le problème est déterminé, c'est-à-dire qu'il ne peut être résolu que par un nombre de cercles limité.

Si l'on exigeait seulement que les cordes interceptées par le cercle cherché, sur les directions des deux côtés d'un même angle du triangle donné, fussent égales à deux droites données, le problème deviendrait indéterminé, c'est-à-dire qu'il pourrait être résolu par une infinité de cercles se succédant les uns aux autres sans interruption; les centres de tous ces cercles seraient donc sur une certaine courbe. A chaque sommet du triangle répondrait une semblable courbe, et les courbes, répondant aux trois sommets, se couperaient aux centres des cercles qui résoudraient le problème. Voyons donc quelle est la nature de ces courbes.

Soient a, b deux des côtés du triangle donné et γ l'angle compris; prenons ces deux côtés pour axes des x et des y, et cherchons sur quelle courbe se trouvent situés les centres de tous les cercles qui interceptent, sur ces mêmes côtés, des longueurs données $2a'$ et $2b'$.

Soit (t,u) l'un de ces centres; les perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux côtés a, b seront respectivement $u\text{Sin.}\gamma$ et $t\text{Sin.}\gamma$; leurs pieds tomberont sur les milieux des cordes $2a'$ et $2b'$; de sorte qu'en ajoutant respectivement a'^2 et b'^2 aux carrés des longueurs de ces perpendiculaires, on aura deux expressions du carré du rayon du cercle qu'on pourra égaler entre elles; ce qui donnera

$$u^2\text{Sin.}^2\gamma+a'^2=t^2\text{Sin.}^2\gamma+b'^2 \quad ,$$

c'est-a-dire,

$$t^2-u^2=\frac{a'^2-b'^2}{\text{Sin.}^2\gamma} \quad ;$$

telle est donc l'équation du lieu des centres de tous les cercles qui interceptent sur les deux côtés a, b de l'angle γ du triangle donné, des longueurs respectivement égales à $2a'$ et $2b'$.

On reconnaît cette équation pour celle d'une hyperbole dont les asymptotes divisent en deux parties égales les quatre angles que forment les directions des côtés a et b; ces asymptotes sont donc rectangulaires, et conséquemment l'hyperbole est équilatère; elle passe d'ailleurs par les quatre points donnés par les deux doubles équations

$$t=\pm\frac{a'}{\text{Sin}.\gamma}\,,\qquad u=\pm\frac{b'}{\text{Sin}.\gamma}\,,$$

dont les distances aux deux côtés a et b sont respectivement $\pm a'$ et $\pm b'$; la solution du problème proposé est donc renfermée dans le théorème suivant :

THÉORÈME I. Aux trois côtés a, b, c *d'un triangle donné soient menées, de part et d'autre, des parallèles qui en soient respectivement distantes des quantités données* a', b', c' ; *ces trois couples de parallèles formeront, par leur rencontre, trois parallélogrammes ayant leurs centres aux trois sommets du triangle. A chacun de ces parallélogrammes soit circonscrite une hyperbole équilatère, ayant pour asymptotes les deux droites, perpendiculaires l'une à l'autre, divisant en deux parties égales, tant l'angle du triangle donné qui a son sommet au centre du parallélogramme, que le supplément de cet angle. Les trois hyperboles ainsi décrites se couperont en quatre points, centres d'autant de cercles qui intercepteront, sur les directions des trois côtés* a, b, c *du triangle donné, des longueurs respectivement égales à* 2a', 2b', 2c'.

Les centres des cercles cherchés ainsi déterminés, rien ne sera plus aisé que d'en trouver les rayons respectifs ; car, pour chacun d'eux, en abaissant de son centre des perpendiculaires sur les directions des trois côtés a, b, c, et prenant, sur ces mêmes directions, de part et d'autre, des pieds de ces perpendiculaires, des longueurs respectivement égales à a', b', c', on obtiendra six points de la circonférence à décrire.

Si deux des trois longueurs données a', b', c' étaient égales entre elles, l'une des trois hyperboles se réduirait à ses asymptotes, et il serait facile de ramener les intersections de chacune de ces asymptotes, avec l'une des deux autres hyperboles, à celle de cette même asymptote avec un cercle ; de sorte qu'alors le problème serait rigoureusement résoluble avec la règle et le compas.

Si les longueurs données a', b', c' étaient toutes trois égales entre elles, les hyperboles se réduiraient toutes trois à leurs asymptotes, et les centres des quatre cercles cherchés ne seraient autres alors que les centres des cercles inscrits et ex-inscrits au triangle proposé ; ce qui est d'ailleurs évident.

PROBLÈME II. Sur le plan d'un triangle donné décrire un cercle tel que les angles circonscrits qui auront mêmes sommets que ce triangle soient égaux à trois angles donnés ?

Solution. Comme il faut trois conditions pour déterminer un cercle sur un plan, on voit d'abord que le problème est déterminé, c'est-à-dire qu'il ne peut être résolu que par un nombre de cercles limité.

Si l'on exigeait seulement que les angles circonscrits au cercle cherché, ayant pour sommets deux des sommets du triangle donné, fussent égaux à deux angles donnés, le problème deviendrait indéterminé, c'est-à-dire qu'il pourrait être résolu par une infinité de cercles, se succédant les uns aux autres sans interruption ; les centres de tous ces cercles seraient donc sur une certaine courbe. A chaque côté du triangle répondrait une semblable courbe, et les courbes répondant aux trois côtés se couperaient aux centres des cercles qui résoudraient le problème. Voyons donc quelle est la nature de ces courbes.

Soient c un des côtés du triangle donné et α, β les deux angles adjacens ; prenons ce côté pour axe des x, le sommet de l'angle α pour origine et la direction de l'autre côté de cet angle pour axe des y, et cherchons sur quelle courbe se trouvent situés les centres de tous les cercles tels que les angles circonscrits qui ont mêmes sommets que les deux angles α et β soient égaux à deux angles donnés $2\alpha'$ et $2\beta'$.

Soit (t, u) le centre de l'un de ces cercles ; les droites qui le joindront aux deux sommets de α et β auront respectivement pour longueurs

$$\sqrt{t^2+2tu\text{Cos}\,\alpha+u^2}\ , \qquad \sqrt{u^2+2u(t-c)\text{Cos}.\alpha+(t-c)^2}\ ;$$

lesquelles multipliées respectivement par $\text{Sin}.\alpha'$ et $\text{Sin}.\beta'$ donneront deux expressions du rayon du cercle cherché que l'on pourra égaler entre elles ; on aura donc en quarrant

$$(t^2+2tu\text{Cos}.\alpha+u^2)\text{Sin}.^2\alpha'=\{u^2+2u(t-c)\text{Cos}.\alpha+(t-c)^2\}\text{Sin}.^2\beta'\ ;$$

telle est donc l'équation du lieu des centres de tous les cercles tels que les angles circonscrits qui ont mêmes sommets que les angles α et β, adjacens au côté c du triangle donné, sont respectivement égaux aux angles donnés $2\alpha'$ et $2\beta'$.

On reconnaît aisément que cette équation est celle d'un cercle qui a son centre sur l'axe des x, c'est-à-dire, sur la direction du côté c du triangle donné; de sorte qu'il suffira, pour pouvoir le décrire, de connaître les deux extrémités de celui de ses diamètres qui est dirigé suivant cette droite; c'est ce à quoi on parviendra en faisant dans cette équation $u=0$, et en déterminant les deux valeurs de t qui en résultent. On obtient ainsi

$$t^2\text{Sin}.^2\alpha'=(t-c)^2\text{Sin}.^2\beta'.$$

d'où

$$\pm t\text{Sin}.\alpha'=(t-c)\text{Sin}.\beta'$$

et par conséquent

$$t=\frac{c\text{Sin}.\beta'}{\text{Sin}.\beta'\pm\text{Sin}.\alpha'}$$

On reconnaît aisément que ces valeurs répondent à deux points, l'un sur le côté c lui-même et l'autre sur son prolongement, dont les distances à ses deux extrémités sont en raison inverse des sinus des angles α' et β' qui leur correspondent ou en raion directe de leurs cosécantes ; de sorte que la solution du problème proposé est renfermé dans le théorème suivant :

THÉORÈME II. Des sommets des trois angles α, β, γ *d'un triangle donné, pris tour à tour pour centres, soient décrits trois cercles dont les rayons, d'ailleurs de grandeur arbitraire, soient respectivement proportionnels aux cosécantes de trois angles donnés* α', β', γ', *et soient déterminés les centres d'homologie ou de similitude de ces trois cercles, pris successivement deux à deux. Si, sur les distances entre les deux centres d'homologie relatifs à chaque couple de cercles, prises tour à tour pour diamètres, on décrit trois nouveaux cercles, ces derniers passeront tous trois par deux points, centres de deux cercles tels que les angles circonscrits qui auront mêmes sommets que les trois angles* α, β, γ *du triangle donné seront respectivement égaux à* $2\alpha'$, $2\beta'$, $2\gamma'$ (*).

(*) C'est exactement à cela que revient, pour le fond, une solution qui nous a été adressée par M. Pagliani, cadet au corps royal des Pionniers à Modène ; mais l'auteur se borne à *démontrer* une construction que sa sagacité lui a suggérée, tandis qu'ici l'analyse fait *découvrir* cette construction.

On sait que tous les points du plan de deux cercles, desquels ces cercles sont vus sous des angles égaux sont ceux de la circonférence décrite sur la distance entre leurs centres d'homologie, prise pour diamètre ; d'où il suit que les deux points du plan de trois cercles d'où ces cercles sont vus sous des angles égaux sont ceux où se coupent les trois cercles décrits de la même manière, par rapport à ces trois-là, pris tour à tour deux à deux. D'après cette remarque le théorème pourra être très-brièvement énoncé comme il suit :

Le centre du cercle qui est vu des sommets d'un triangle donné sous trois angles donnés, est le point d'où l'on verrait, sous des angles égaux, trois

Les centres des deux cercles qui résolvent le problème ainsi déterminés, rien ne sera plus facile que d'en trouver les rayons respectifs; car, pour chacun, en joignant son centre aux sommets des trois angles α, β, γ par des droites, et menant, par les mêmes sommets, de nouvelles droites faisant respectivement avec celles-là des angles α', β', γ''; les perpendiculaires abaissées du centre sur ces dernières seront des rayons du cercle à décrire.

Si deux des trois angles donnés α', β', γ' étaient égaux entre eux, l'un des cercles, lieux des centres des cercles cherchés, se réduirait à une perpendiculaire sur le milieu de l'un des côtés du triangle donné, axe de symptose ou axe radical des deux autres; et, si ces trois angles étaient égaux, les trois cercles se réduisant tous alors à des perpendiculaires sur les milieux des côtés du triangle donné, le centre du cercle cherché ne serait donc autre que le centre du cercle circonscrit à ce triangle; ce qui est d'ailleurs évident.

A cause de la parfaite analogie qui existe entre ces deux problèmes, on était fondé à soupçonner que, puisque le premier se résout par des intersections d'hyperboles équilatères, l'autre se résoudrait par des intersections de cercles.

Les quatre autres problèmes de l'endroit cité ne seraient pas plus difficiles à traiter que ces deux-là, si les formules de la géométrie analytique à trois dimensions, relatives aux axes de coordonnées obliques, nous étaient plus familières.

Lyon, le 28 juillet 1828.

---

cercles qui auraient pour centres les sommets du triangle, et dont les rayons seraient respectivement proportionnels aux cosécantes des moitiés des trois angles donnés.

J. D. G.