
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

J. STEINER

Géométrie de situation. Démonstration de quelques théorèmes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__1_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1828-1829, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Démonstration de quelques théorèmes ;

Par M. J. STEINER.

~~~~~

### §. I.

1. Il est généralement connu que si, par un quelconque P des points du plan d'un triangle ABC et par ses sommets, on mène trois droites AP, BP, CP, rencontrant respectivement en A', B', C', les directions des côtés BC, CA, AB de ce triangle, on aura l'équation

$$AB'.BC'.CA' = BA'.CB'.AC' ;$$

et que, réciproquement, si trois points A', B', C', sont tellement situés sur les directions des côtés d'un triangle ABC, que cette équation ait lieu, les droites AA', BB', CC' concourront en un même point P, pourvu toutefois (*Annales*, tom. XVII, pag. 141)

*Tom. XIX, n.º I, 1.ºr juillet 1828.*

## THEOREMES

que ceux de ces points qui seront situés sur les côtés même du triangle, et non sur leurs prolongemens, soient en nombre impair. On sait que, dans le cas contraire, les trois points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  appartiendraient à une même droite.

2. Par les trois points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  soit décrit un cercle coupant de nouveau en  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ , les directions des côtés  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ ; par la propriété des cordes ou des sécantes, issues d'un même point, on aura

$$AB'.AB''=AC'.AC'' ,$$

$$BC'.BC''=BA'.BA'' ,$$

$$CA'.CA''=CB'.CB'' ;$$

équations qui, multipliées membre à membre, donneront, en réduisant, au moyen de la précédente (1),

$$AB''.BC''.CA''=BA''.CB''.AC'' ;$$

ce qui prouve (1) que les droites  $AA''$ ,  $BB''$ ,  $CC''$  concourent aussi en un même point  $P'$ .

3. Parce que cette propriété est de nature projective, elle aura lieu également lorsqu'on substituera au cercle une ligne quelconque du second ordre. En invoquant ensuite la théorie des polaires réciproques, on obtiendra les deux théorèmes que voici :

*THÉORÈME. Les trois sommets d'un triangle étant  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , et  $P$  étant un point quelconque de son plan; si  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  sont les points où les directions des côtés  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ , sont respectivement rencontrées par les droites  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$ , et que, par*

*THÉORÈME. Les trois côtés d'un triangle étant  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , et  $P$  étant une droite tracée arbitrairement sur son plan; si  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  sont les droites qui joignent respectivement les sommets  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ , aux points  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$ , et qu'on décrive une*

ces trois points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  on fasse passer une ligne quelconque du second ordre, coupant de nouveau les mêmes côtés respectivement en  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ , les droites  $AA''$ ,  $BB''$ ,  $CC''$  concourront aussi toutes trois en un même point  $P'$  (\*).

Et réciproquement, deux points  $P$ ,  $P'$  étant pris arbitrairement sur le plan d'un triangle dont les sommets sont  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ; si l'on mène les droites  $AP$  et  $AP'$ ,  $BP$  et  $BP'$ ,  $CP$  et  $CP'$ , rencontrant respectivement les directions des côtés  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  en  $A'$  et  $A''$ ,  $B'$  et  $B''$ ,  $C'$  et  $C''$ , ces six points appartiendront à une même ligne du second ordre.

ligne quelconque du second ordre, touchant les trois droites  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ; en menant à cette courbe, par les mêmes sommets, les tangentes  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ , les points  $AA''$ ,  $BB''$ ,  $CC''$  appartiendront aussi tous trois à une même droite  $P'$ .

Et réciproquement, deux droites  $P$ ,  $P'$  étant tracées arbitrairement sur le plan d'un triangle dont les côtés sont  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ; si l'on joint respectivement les points  $AP$  et  $AP'$ ,  $BP$  et  $BP'$ ,  $CP$ , et  $CP'$  aux sommets  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  par des droites  $A'$  et  $A''$ ,  $B'$  et  $B''$ ,  $C'$  et  $C''$ , ces six droites seront tangentes à une même ligne du second ordre.

4. On sait que, lorsqu'une ligne du second ordre touche les trois côtés d'un triangle, les droites qui joignent les points de contact aux sommets respectivement opposés se coupent toutes trois au même point; et que, réciproquement, trois droites menées par les sommets d'un triangle, de manière à se couper au même point, rencontrent les côtés respectivement opposés en des points où ils peuvent être touchés par une même ligne du second ordre. De là (3), et par la théorie des polaires réciproques, on pourra conclure ces deux théorèmes.

---

(\*) En remplaçant la ligne du second ordre par le système de deux droites, on obtiendrait quelques porismes déjà connus.

*THÉORÈME. Les points de contact des trois côtés d'un triangle avec deux lignes quelconques du second ordre qui lui sont inscrites, appartiennent tous six à une troisième ligne du second ordre.*

*THÉORÈME. Les tangentes menées, par les trois sommets d'un triangle, à deux lignes quelconques du second ordre qui lui sont circonscrites, touchent toutes six une troisième ligne du second ordre.*

## §. II.

5. Des précédens théorèmes on en déduit aisément d'autres analogues, relatifs aux surfaces du second ordre comparées au tétraèdre.

Soit ABCD un tétraèdre quelconque. Par un point quelconque P de l'espace et par chacune de ses arêtes concevons des plans coupant les arêtes respectivement opposées. Soient  $a, b, c$  les points où les arêtes BC, CA, AB, sont respectivement coupées par les plans APD, BPD, CPD, et soient  $\alpha, \beta, \gamma$  ceux où les arêtes opposées AD, BD, CD, sont respectivement coupées par les plans BPC, CPA, APB, nos six plans se couperont deux à deux suivant les trois droites  $a\alpha, b\beta, c\gamma$ ; il est visible, en outre,

que les droites  $\left\{ \begin{array}{l} B\gamma, C\beta, Da \\ C\alpha, A\gamma, Db \\ A\beta, B\alpha, Dc \\ Aa, Bb, Cc \end{array} \right\}$  se couperont en un même point  $\left\{ \begin{array}{l} A' \\ B' \\ C' \\ D' \end{array} \right\}$ ;

et que les droites AA', BB', CC', DD' se couperont toutes quatre au point P.

Il est aisé de voir que, réciproquement, six points  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  étant pris respectivement sur les arêtes BC, CA, AB, AD, BD, CD d'un tétraèdre ABCD, de telle sorte

que les droites  $\left. \begin{array}{l} B\gamma, C\beta, Da \\ C\alpha, A\gamma, Db \\ A\beta, B\alpha, Dc \\ Aa, Bb, Cc \end{array} \right\}$  se coupent en un même point  $\left. \begin{array}{l} A' \\ B' \\ C' \\ D' \end{array} \right\}$ ,

les droites  $AA', BB', CC', DD'$  se couperont aussi toutes quatre en un même point  $P$  par lequel passeront aussi les trois droites  $a\alpha, b\beta, c\gamma$ .

Ainsi, lorsque six points sont tellement situés sur les directions des arêtes d'un tétraèdre, que les droites menées dans chaque face par les points qui y sont situés et par les sommets de cette face qui leur sont respectivement opposés se coupent toutes trois en un même point, les droites qui joignent deux à deux les points situés sur les directions des arêtes respectivement opposées se coupent aussi toutes trois en un même point et réciproquement.

Il est à remarquer que les six points  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  sont tellement liés entre eux, que trois quelconques de ces six points, choisis de manière à ne pas appartenir à une même face, déterminent le point  $P$  et par suite les trois autres, ainsi que les droites  $a\alpha, b\beta, c\gamma$ .

6. Par les six points  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  concevons une surface quelconque du second ordre, coupant de nouveau les mêmes arêtes du tétraèdre en  $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ ; les intersections de cette surface avec les plans des faces du tétraèdre seront des lignes du second ordre coupant les côtés de ces faces en trois points tels que les droites qui les joindront aux sommets respectivement opposés se couperont en un même point; donc (2) les droites qui joindront dans la même face les trois autres intersections aux mêmes sommets se couperont aussi en un même point; et par conséquent (5) les points  $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$  jouiront des propriétés que nous

venons de voir appartenir aux points  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ ; de sorte que les droites  $a'\alpha', b'\beta', c'\gamma'$  concourront toutes trois en un même point  $P'$ ; de là, et par la théorie des polaires réciproques, on conclura ces deux théorèmes :

*THÉORÈME. Si une surface quelconque du second ordre est tellement située, par rapport à un tétraèdre, qu'elle coupe ses arêtes en six points  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ , tels que les droites  $a\alpha, b\beta, c\gamma$  qui joignent les points d'intersection qui répondent aux arêtes respectivement opposées concourent toutes trois en un même point  $P$ , elle coupera de nouveau ces mêmes arêtes en six autres points  $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$  tels que les droites  $a'\alpha', b'\beta', c'\gamma'$  qui joindront les points d'intersection situés sur les arêtes respectivement opposées concourront aussi toutes trois en un même point  $P'$  (\*).*

Et réciproquement, un point  $P$  étant situé d'une manière quelconque dans l'espace; si l'on conduit, par ce point et par les arêtes d'un tétraèdre, des plans cou-

*THÉORÈME. Si une surface quelconque du second ordre est tellement située, par rapport à un tétraèdre, que six plans tangens  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  à cette surface, conduits par les arêtes du tétraèdre, soient tels que les intersections  $a\alpha, b\beta, c\gamma$  des plans tangens issus des arêtes respectivement opposées soient toutes trois dans un même plan  $P$ , les six autres plans tangens  $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ , menés à cette surface par ces mêmes arêtes, seront tels que les intersections  $a'\alpha', b'\beta', c'\gamma'$  des plans tangens issus des arêtes respectivement opposées seront aussi toutes trois situées dans un même plan  $P'$ .*

Et réciproquement, un plan  $P$  étant situé d'une manière quelconque dans l'espace; si, par chacune des arêtes d'un tétraèdre et par le point où ce plan

---

(\*) En remplaçant la surface du second ordre par le système de deux plans, on obtiendra des porismes analogues à ceux que nous avons signalés dans la précédente note.

*pant respectivement leurs opposées, on obtiendra ainsi, sur ces arêtes, six points  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ , tels que les droites  $a\alpha, b\beta, c\gamma$  qui joindront les points situés sur les arêtes opposées concourront toutes trois au point  $P$ ; et si, pour un autre point  $P'$ , également quelconque, on détermine, sur les mêmes arêtes, six nouveaux points  $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ , tels que les droites  $a'\alpha', b'\beta', c'\gamma'$  qui joindront les points situés sur les arêtes opposées concourent aussi toutes trois en ce même point  $P'$ , les douze points  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$  seront tous situés sur une même surface du second ordre.*

*coupe son opposée, on conduit un plan, on obtiendra ainsi six plans  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ , tels que les droites  $a\alpha, b\beta, c\gamma$ , suivant lesquelles se couperont ceux qui passeront par les arêtes opposées, seront toutes trois situées dans le plan  $P$ ; et si, pour un autre plan  $P'$ , également quelconque, on conduit, par les mêmes arêtes, six nouveaux plans  $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ , tels que les droites  $a'\alpha', b'\beta', c'\gamma'$ , suivant lesquelles se couperont ceux qui seront issus des arêtes opposées, soient aussi situées toutes trois dans ce même  $P'$ , les douze plans  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$  seront tous tangens à une même surface du second ordre.*

7. Si l'on conçoit une surface quelconque du second ordre, qui touche les six arêtes d'un tétraèdre donné, ses intersections avec les plans des faces de ce tétraèdre seront des lignes du second ordre touchant les trois côtés de ces faces; et si, dans ces mêmes faces, on mène des droites des trois sommets aux points de contact des côtés respectivement opposés, ces droites (4) se couperont en un même point; d'où il suit (5) que les droites qui joindront deux à deux les points de contact situés sur les arêtes opposées se couperont toutes trois en un même point.

Il est aisé de voir que, réciproquement, six points étant pris respectivement sur les arêtes d'un tétraèdre, de telle sorte que les droites qui joindront deux à deux ceux qui seront situés sur les arêtes opposées concourent toutes trois en un même point, on pourra



## 8 THEOREMES DE GEOMETRIE.

toujours concevoir une surface du second ordre qui touche les arêtes du tétraèdre en ces six points.

De là et ensuite, par la théorie des polaires réciproques, on pourra conclure (5) et (6), les deux théorèmes suivans :

|                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><i>THÉORÈME. Si deux surfaces du second ordre touchent l'une et l'autre les six arêtes d'un tétraèdre, les douze points de contact, situés deux à deux sur ces arêtes, appartiendront à une troisième surface du second ordre (*).</i></p> | <p><i>THÉORÈME. Si deux surfaces du second ordre touchent l'une et l'autre les six arêtes d'un tétraèdre, les douze plans tangens à ces surfaces, conduits deux à deux par ces arêtes, toucheront une troisième surface du second ordre (*).</i></p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

(\*) Voici deux autres théorèmes qui, s'ils sont vrais, comme ils paraissent l'être, formeront un complément fort naturel de cette théorie; nous en abandonnons l'examen à la sagacité de M. Steiner.

|                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><i>THÉORÈME. Si trois surfaces du second ordre sont inscrites à un même tétraèdre, les douze points où elles toucheront ses faces appartiendront à une quatrième surface du second ordre.</i></p> | <p><i>THÉORÈME. Si trois surfaces du second ordre sont circonscrites à un même tétraèdre, leurs douze plans tangens par ses sommets toucheront une quatrième surface du second ordre.</i></p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Ces sortes de théorèmes présentent beaucoup d'intérêt, comme pouvant acheminer à découvrir, soit la relation entre dix points d'une surface du second ordre, soit la relation entre dix plans tangens à une telle surface; problème dont la solution ne pourrait que faire beaucoup d'honneur au géomètre à qui la science en serait redevable.

J. D. G.