ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Géométrie élémentaire. Sur les quatre cercles qui touchent les trois côtés d'un même triangle, et sur les huit sphères qui touchent les quatre faces d'un même tétraèdre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 211-218
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__211_0>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Sur les quatre cercles qui touchent les trois côtés d'un même triangle, et sur les huit sphères qui touchent les quatre faces d'un même tétraèdre;

Par M. L. P. F. R.

Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, d'ajouter quelques résultats nouveaux à ceux qui ont été donnés par MM. Steiner et Bobillier, à la pag. 85 du présent volume, en conservant leurs notations pour la commodité du lecteur.

En désignant par a', b', c' les perpendiculaires abaissées sur les directions des côtés a, b, c du triangle T, des sommets respectivement opposés, on a cette triple équation

$$aa'=bb'=cc'=2T\ ,$$

de laquelle tirant les valeurs de a, b, c pour les substituer dans les formules (1), il viendra, en divisant par $2T$,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{r}&=\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}\,,\\
\frac{1}{\alpha}&=\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}-\frac{1}{a'}\,,\\
\frac{1}{\beta}&=\frac{1}{c'}+\frac{1}{a'}-\frac{1}{b'}\,,\\
\frac{1}{\gamma}&=\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}-\frac{1}{c'}\,;
\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

c'est-à-dire, *l'inverse du rayon du cercle inscrit à un triangle est égal à la somme des inverses des trois hauteurs de ce triangle;*

L'inverse du rayon de l'un quelconque des trois cercles ex-inscrit, est égal à la somme des inverses des hauteurs qui répondent aux deux autres, moins l'inverse de la hauteur qui répond à celui-là.

En rapprochant la première des équations (14) de l'équation (2), on peut dire encore que *la somme des inverses des rayons des trois cercles ex-inscrits, est égale à la somme des inverses des trois hauteurs du triangle.*

Les équations (5) donnent

$$bc=\frac{\alpha(\beta-r)(\gamma-r)}{r}\,,$$

$$ca=\frac{\beta(\gamma-r)(\alpha-r)}{r}\,,$$

$$ab=\frac{\gamma(\alpha-r)(\beta-r)}{r}\,;$$

d'où, en ajoutant,

$$bc+ca+ab=\frac{3\alpha\beta\gamma-2(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)r+(\alpha+\beta+\gamma)r^2}{r}\,;$$

mais l'équation (2) donne

$$\alpha\beta\gamma=r(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)\ ; \qquad (15)$$

en substituant donc, on aura

$$bc+ca+ab=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta+\alpha r+\beta r+\gamma r\ , \qquad (16)$$

c'est-à-dire, *la somme des produits, deux à deux, des rayons des quatre cercles qui touchent à la fois les trois côtés d'un triangle, est égale à la somme des produits, deux à deux, de ces trois côtés.*

Les mêmes équations (5) donnent

$$a+b+c=\frac{3\alpha\beta\gamma-(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)r}{\alpha\beta\gamma r}T\ ;$$

ou, en vertu des équations (3) et (15)

$$a+b+c=\frac{r(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)+\alpha\beta\gamma}{T}\ ;$$

et par conséquent

$$\alpha\beta\gamma+\beta\gamma r+\gamma\alpha r+\alpha\beta r=T(a+b+c)\ ; \qquad (17)$$

c'est-à-dire, *la somme des produits, trois à trois, des rayons des quatre cercles qui touchent les trois côtés d'un triangle, est égale à l'aire du triangle, multipliée par son périmètre.*

L'équation (8) donne, en développant,

$$R=\frac{\alpha\beta\gamma-(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)r+(\alpha+\beta+\gamma)r^2-r^3}{4r^2}\ ;$$

ou, en réduisant, au moyen de l'équation (15),

$$R=\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-r)\ ; \qquad (18)$$

c'est l'élégant théorème de M. Bobillier.

Si l'on pose $a+b+c=2s$, en quarrant les équations (1) et ayant égard à l'équation (3), on aura

$$s^2=\frac{\alpha\beta\gamma}{r}\,,\quad (s-a)^2=\frac{\beta\gamma r}{\alpha}\,,\quad (s-b)^2=\frac{\gamma\alpha r}{\beta}\,,\quad (s-c)^2=\frac{\alpha\beta r}{\gamma}\,,\qquad (19)$$

ou, en vertu de l'équation (15),

$$\left.\begin{aligned} s^2&=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\,,\\ (s-a)^2&=\beta\gamma-r(\beta+\gamma)\,,\\ (s-b)^2&=\gamma\alpha-r(\gamma+\alpha)\,,\\ (s-c)^2&=\alpha\beta-r(\alpha+\beta)\,. \end{aligned}\right\}\ (20)$$

au moyen de quoi les équations (4) deviennent

$$T=\frac{\alpha\beta\gamma}{s}=r\frac{\beta\gamma}{s-a}=r\frac{\gamma\alpha}{s-b}=r\frac{\alpha\beta}{s-c}\,.\qquad (21)$$

Si, au moyen de la première des équations (19), on élimine r des trois autres, elles deviendront

$$s-a=\frac{\beta\gamma}{s}\,,\quad s-b=\frac{\gamma\alpha}{s}\,,\quad s-c=\frac{\alpha\beta}{s}\,,$$

d'où on tirera

$$a=\frac{s^2-\beta\gamma}{s}\,,\quad b=\frac{s^2-\gamma\alpha}{s}\,,\quad c=\frac{s^2-\alpha\beta}{s}\,;$$

ou, en y mettant pour s sa valeur donnée par la première des équations (20),

$$a=\frac{\alpha(\beta+\gamma)}{\sqrt{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}}\,,\quad b=\frac{\beta(\gamma+\alpha)}{\sqrt{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}}\,,\quad c=\frac{\gamma(\alpha+\beta)}{\sqrt{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}}\,;\ (22)$$

formules qui feront connaître les trois côtés d'un triangle lorsque l'on connaîtra les rayons des trois cercles qui lui sont ex-inscrits; on en tire

$$\frac{\alpha(\beta+\gamma)}{a}=\frac{\beta(\gamma+\alpha)}{b}=\frac{\gamma(\alpha+\beta)}{c}\ . \qquad (23)$$

Si le triangle est rectangle et que c en soit l'hypothénuse, on aura $a^2+b^2=c^2$, c'est-à-dire (22),

$$\alpha^2(\beta+\gamma)^2+\beta^2(\gamma+\alpha)^2=\gamma^2(\alpha+\beta)^2$$

ou bien, en développant et réduisant

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\gamma^2\ , \qquad (24)$$

équation qui, comparée à (15), donne, comme l'a trouvé M. Steiner,

$$\alpha\beta=\gamma r\ ; \qquad (25)$$

mettant cette valeur pour $\alpha\beta$ dans (24) et divisant par γ, on aura encore

$$r+\alpha+\beta=\gamma\ . \qquad (26)$$

A l'aide de ces deux dernières équations on peut faire disparaître des divers résultats obtenus deux des quatre rayons; on trouve ainsi, pour le triangle rectangle,

$$\left.\begin{aligned}
&s=\gamma\ ,\\
&a=\alpha+r=\gamma-\beta\ ,\\
&b=\beta+r=\gamma-\alpha\ ,\\
&c=\alpha+\beta=\gamma-r\ ,\\
&T=\alpha\beta=\gamma r\ ,\\
&R=\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\tfrac{1}{2}(\gamma-r)\ .
\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Soient D_r, D_α, D_β, D_γ les distances du centre du cercle circonscrit aux centres des cercles inscrits et ex-inscrits, on aura, comme l'on sait (*Annales*, tom. XIV, pag. 56),

$$\left.\begin{aligned} D^2_r&=R^2-2Rr\ ,\\ D^2_\alpha&=R^2+2R\alpha\ ,\\ D^2_\beta&=R^2+2R\beta\ ,\\ D^2_\gamma&=R^2+2R\gamma\ . \end{aligned}\right\}\quad(28)$$

En prenant la somme de ces quatre équations, et ayant égard à l'équation (18), il viendra

$$D^2_r+D^2_\alpha+D^2_\beta+D^2_\gamma=12R^2\ ;\qquad(29)$$

c'est-à-dire, *la somme des carrés des distances du centre du cercle circonscrit à un triangle aux centres des cercles inscrit et ex-inscrit à ce triangle, est égale à douze fois le carré du rayon de ce cercle circonscrit.*

Des mêmes équations (28) on tire encore

$$D^2_\gamma+D^2_r=2R+2R(\gamma-r)\ ,\qquad D^2_\alpha+D^2_\beta=2R^2+2R(\alpha+\beta)\ ;$$

mais, si le triangle est rectangle, l'équation (26) donne

$$\gamma-r=\alpha+\beta\ ;$$

donc alors

$$D^2_r+D^2_\gamma=D^2_\alpha+D^2_\beta\ ;\qquad(30)$$

c'est-à-dire, *la somme des carrés des distances du centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle aux centres des cercles ex-inscrits qui répondent aux deux côtés de l'angle droit, est égale à la somme des carrés des distances de ce même centre, au centre* *du cerle ex-inscrit qui répond à l'hypothénuse et au centre du cercle inscrit.*

Tous ces divers résultats doivent avoir leurs analogues relatifs aux huits sphères qui touchent à la fois les quatre faces d'un tétraèdre ; bornons-nous au cas le plus simple.

Soient a', b', c', d' les perpendiculaires abaissées sur les plans des faces a, b, c, d du tétraèdre T des sommets respectivement opposés ; on aura cette quadruple équation

$$aa'=bb'=cc'=dd'=3T\ ,$$

de laquelle, tirant les valeurs de a, b, c, d pour les substituer dans les huit équations de la pag. 93, il viendra, en divisant par $3T$,

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}+\frac{1}{d'}\ , \qquad (31)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha}&=\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}+\frac{1}{d'}-\frac{1}{a'}\ ,\\
\frac{1}{\beta}&=\frac{1}{c'}+\frac{1}{d'}+\frac{1}{a'}-\frac{1}{b'}\ ,\\
\frac{1}{\gamma}&=\frac{1}{d'}+\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}-\frac{1}{c'}\ ,\\
\frac{1}{\delta}&=\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}-\frac{1}{d'}\ ;
\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

$$\left.\begin{aligned}
\pm\frac{1}{\alpha'}&=\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}-\frac{1}{a'}-\frac{1}{d'}\ ,\\
\pm\frac{1}{\beta'}&=\frac{1}{c'}+\frac{1}{a'}-\frac{1}{b'}-\frac{1}{d'}\ ,\\
\pm\frac{1}{\gamma'}&=\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}-\frac{1}{c'}-\frac{1}{d'}\ ;
\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

c'est-à-dire, 1.° *l'inverse du rayon de la sphère inscrite à un tétraèdre, est égale à la somme des inverses de ses quatre hauteurs ;*

2.° *L'inverse du rayon de la sphère ex-inscrite sur une des faces d'un tétraèdre, est égale à la somme des inverses des hauteurs qui répondent aux trois autres faces, moins l'inverse de la hauteur qui répond à celle-là ;*

3.° *Enfin, l'inverse du rayon de la sphère ex-inscrite sur l'une ou l'autre de deux arêtes opposées d'un tétraèdre, est égale à la différence entre la somme des inverses des hauteurs qui répondent aux deux faces qui se coupent suivant l'une de ces deux arêtes et la somme des inverses des hauteurs qui répondent aux deux faces qui se coupent suivant son opposée.*