ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

POISSON

Hydrodynamique. Mémoire sur les petites oscillations de l'eau contenue dans un cylindre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 225-240

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__225_0>

HYDRODYNAMIQUE.

Mémoire sur les petites oscillations de l'eau contenue dans un cylindre ;

Par M. POISSON.

(Lu à l'Académie des sciences, le 27 octobre 1828).

(1) SOIENT x, y, z, les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque du fluide, au bout du temps t, compté de l'origine du mouvement. Les vîtesses du même point, suivant les axes des coordonnées, seront exprimées, comme on sait, par les différences partielles, relatives à x, y, z, d'une fonction de ces trois variables et de t; et, si l'on représente cette fonction par φ, il faudra qu'on ait

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0 . \qquad (1)$$

Prenons pour le plan des x, y, celui du niveau du fluide dans l'état d'équilibre, l'axe des z étant vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur. Représentons cette force par g. Au bout du temps t, soit z' l'ordonnée d'un point quelconque de la surface du fluide ; nous aurons

$$gz'=\frac{d\varphi}{dt} ; \qquad (2)$$

équation dans laquelle on fera $z=0$. Afin que les mêmes points restent constamment à cette surface, il faudra qu'on ait aussi

$$g\,\frac{d\varphi}{dz}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,, \qquad (3)$$

pour $z=0$. Si l'on suppose que le fond du vase soit un plan horizontal, et si l'on désigne par h la profondeur de l'eau, on aura encore

$$\frac{d\varphi}{dz}=0\,, \qquad (4)$$

pour $z=h$; ce qui exprime que les mêmes molécules du fluide restent constamment en contact avec le fond du vase.

(2) L'eau étant contenue dans un cylindre vertical, il conviendra de transformer les coordonnées horizontales x et y, en deux autres plus appropriées à la question. Plaçons leur origine sur l'axe de ce cylindre ; soit r la perpendiculaire abaissée du point qui leur correspond sur cet axe, et ψ l'angle compris entre le plan de ces deux droites et celui des x, y ; on aura

$$x=r\,\mathrm{Cos}.\psi\,, \qquad y=r\,\mathrm{Sin}.\psi\,,$$

et l'équation (1) deviendra

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\,\frac{d\varphi}{dr}+\frac{1}{r^2}\,\frac{d^2\varphi}{d\psi^2}=0\,. \qquad (5)$$

La vîtesse, suivant le prolongement de r, sera exprimée par $\frac{d\varphi}{dr}$; si donc on appelle a le rayon du cylindre, il faudra qu'on ait

$$\frac{d\varphi}{dr}=0\,, \qquad (6)$$

pour $r = a$; condition nécessaire pour que les mêmes molécules restent constamment adjacentes à la surface latérale du cylindre, et analogues aux équations (3) et (4) relatives à la surface du fluide et au fond du vase. On doit observer que, si les conditions exprimées par ces trois équations n'étaient pas constamment remplies, pendant le mouvement du fluide, ce mouvement serait très-compliqué et peu susceptible d'être déterminé par le calcul. C'est pour cela que Lagrange a mis ces équations, dans la *Mécanique analytique*, au nombre de celles qui doivent concourir à la détermination du mouvement.

Cela posé, la question que nous aurons à résoudre se divisera en deux parties : la première consistera à satisfaire, par la valeur la plus générale de φ, aux équations (3), (4), (5), (6) ; dans la seconde, il s'agira de déterminer, d'après l'état initial du fluide, les quantités arbitraires que cette valeur générale pourra renfermer.

(3) Les valeurs de φ et de ses différences partielles sont égales pour $\psi = 0$ et $\psi = 2\varpi$, puisqu'elles appartiennent à un même point du fluide, ϖ étant le rapport de la circonférence au diamètre. Cela étant, quelle que soit cette fonction φ, on pourra la représenter par la formule connue

$$\varphi = \frac{1}{2\varpi}\int_0^{2\varpi} \varphi' d\psi' + \frac{1}{\varpi}\Sigma\left(\int_0^{2\varpi} \varphi' \operatorname{Cos.} n(\psi - \psi') d\psi'\right); \qquad (7)$$

et les différences partielles de φ, ou les vîtesses du fluide, seront aussi exprimées par les différences partielles de cette même formule dans laquelle φ' est ce que devient φ quand on y met ψ' à la place de ψ; n représente un nombre entier et positif, et la somme Σ s'étend à toutes les valeurs de n, depuis $n = 1$ jusqu'à $n = \infty$.

En intégrant par parties, on a

$$\int \frac{d^2\varphi'}{d\psi'^2} \operatorname{Cos}.n(\psi-\psi')d\psi'$$

$$= \frac{d\varphi'}{d\psi'} \operatorname{Cos}.n(\psi-\psi') - n\varphi' \operatorname{Sin}.n(\psi-\psi') - n^2 \int \varphi' \operatorname{Cos}.n(\psi-\psi')d\psi' ;$$

aux deux limites $\psi'=0$ et $\psi'=2\varpi$, les termes compris hors du signe $\int$ ont la même valeur et disparaissent, en conséquence, dans l'intégrale définie ; on aura donc simplement

$$\int_0^{2\varpi} \frac{d^2\varphi'}{d\psi'^2} \operatorname{Cos} n(\psi-\psi')d\psi' = -n^2 \int_0^{2\varpi} \varphi' \operatorname{Cos}.n(\psi-\psi')d\psi' .$$

D'après cela si l'on met ψ' et φ' au lieu de ψ et φ dans l'équation (5), que l'on intègre tous les termes depuis $\psi'=0$ jusqu'à $\psi'=2\varpi$, après les avoir multipliés par $\frac{1}{\varpi} \operatorname{Cos}.n(\psi-\psi')d\psi'$ et que l'on fasse, pour abréger,

$$\frac{1}{\varpi} \int_0^{2\varpi} \varphi' \operatorname{Cos}.n(\psi-\psi')d\psi' = \varphi , \qquad (8)$$

il en résultera

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{n^2\varphi}{r^2} = 0 . \qquad (9)$$

En même temps les équations (3), (4), (6) donneront celles-ci :

$$g\frac{d\varphi}{dz} - \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 , \qquad \frac{d\varphi}{dz} = 0 , \qquad \frac{d\varphi}{dr} = 0 , \qquad (10)$$

dont la première aura lieu pour $z=0$, la seconde pour $z=h$ et la troisième pour $r=a$. En faisant usage de ces équations (9) et (10) on n'aura plus à s'occuper de la variable ψ, qu'elles ne contiennent pas explicitement.

(4) Dans un autre mémoire (*) j'ai donné, sous forme finie, l'intégrale complète de l'équation (9) ; mais, pour résoudre le problème proposé, il sera plus commode, ainsi que je l'ai fait dans d'autres cas, d'employer la valeur de φ sous la forme équivalente

$$\varphi=\Sigma(Ue^{mz}+Ve^{-mz})\ ;$$

m étant une constante arbitraire, e la base des logarithmes népériens, U et V des fonctions de r et t indépendantes de z, et Σ une somme qui s'étend à toutes les valeurs possibles, réelles ou imaginaires de m, U et V.

Pour satisfaire à la seconde équation (10), il faudra prendre

$$U=Re^{-mh}\ ,\qquad V=Re^{mh}\ ,$$

R étant une nouvelle fonction de r et t. On aura alors

$$\varphi=\Sigma(e^{m(h-z)}+e^{-m(h-z)})R\ ;$$

et, si l'on substitue cette valeur de φ dans l'équation (9) qui doit avoir lieu pour toutes les valeurs de z, on en conclura

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-\frac{n^2R}{r^2}+m^2R=0\ . \qquad (11)$$

On a vu, dans le mémoire que je viens de citer, qu'on satisfait à cette équation différentielle du second ordre, en prenant

---

(*) *Journal de l'Ecole polytechnique*, XIX.e cahier, pag. 215 et 475

$$R = r^n \int_0^{\varpi} \mathrm{Cos.}(mr\mathrm{Cos.}\omega)\mathrm{Sin.}^{2n}\omega d\omega \; ; \qquad (12)$$

et que son intégrale complète se réduit à cette valeur particulière de R, multipliée par une constante arbitraire, lorsqu'on y supprime la partie qui deviendrait infinie pour $r=0$, ce qui fait disparaître la seconde constante arbitraire. En observant que celle qui subsiste peut être une fonction de t, nous la représenterons par T.

La troisième équation (10) ayant aussi lieu pour toutes les valeurs de r, on en conclut

$$\frac{dR}{dr} = 0,$$

pour $r=a$, ou, ce qui est la même chose,

$$\int_0^{\varpi} [n\mathrm{Cos.}(ma\mathrm{Cos.}\omega - ma\mathrm{Cos.}\omega\mathrm{Sin.}(ma\mathrm{Cos.}\omega)]\mathrm{Sin.}^{2n}\omega d\omega = 0 \; ; \qquad (13)$$

équation transcendante qui servira à déterminer m pour chaque valeur du nombre n et pour $n=0$.

Comme la première équation (10), relative à la surface ou à $z=0$, doit subsister pour toutes les valeurs de r, en y mettant pour φ sa valeur, on en conclura

$$gm\left(e^{mh} - e^{-mh}\right)T + \left(e^{mh} + e^{-mh}\right)\frac{d^2T}{dt^2} = 0 \; ;$$

et, si l'on fait, pour abréger

$$\frac{gm(e^{mh} - e^{-mh})}{e^{mh} + e^{-mh}} = k^2 ,$$

l'intégrale complète de cette équation sera

$$T = P\,\mathrm{Cos.}\,kt + Q\,\mathrm{Sin}\,kt\,,$$

P et Q étant deux constantes arbitraires.

Maintenant la valeur de v, qui satisfait aux équations (9) et (10), sera

$$v = \Sigma (P\,\mathrm{Cos.}\,kt + Q\,\mathrm{Sin.}\,kt) R (e^{m(h-z)} + e^{-m(h-z)})\,; \qquad (14)$$

la fonction R étant donnée par la formule (12), et la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs possibles de P et Q, mais seulement aux valeurs de m tirées des équations (13). Ses racines sont deux à deux égales et de signes contraires ; mais on peut réunir en un seul les deux termes de la somme Σ qui répondent à chaque couple de racines, et n'étendre ensuite cette somme qu'aux valeurs de m dont les carrés sont différens.

(3) Pour déterminer les coefficiens P et Q en fonctions de m, d'après l'état initial du fluide, je ferai usage de la méthode que j'ai déjà employée dans beaucoup d'autres cas, et dont cette détermination fournira un exemple digne de remarque.

Soit m' une racine quelconque de l'équation (3); multiplions l'équation (9) par $(e^{m'(h-z)} + e^{-m'(h-z)})\mathrm{d}z$, puis intégrons tous ses termes, depuis $z = o$ jusqu'à $z = h$; en faisant pour abréger

$$\int_{o}^{h} (e^{m'(h-z)} + e^{-m'(h-z)}) v\,\mathrm{d}z = u\,,$$

nous aurons

$$\int_{o}^{h} \left(e^{m'(h-z)} + e^{-m'(h-z)}\right) \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}\,\mathrm{d}z + \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} - \frac{n^2 u}{r} = o\,.$$

En intégrant par parties, on a

$$\int\left(e^{m'(h-z)}+e^{-m'(h-z)}\right)\frac{d^2\varphi}{dz^2}dz$$

$$=\left(e^{m'(h-z)}+e^{-m'(h-z)}\right)\frac{d\varphi}{dz}+\left(e^{m'(h-z)}-e^{-m'(h-z)}\right)m'\varphi+m'^2\int\left(e^{m'(h-z)}+e^{-m'(h-z)}\right)\varphi dz\ ;$$

à la limite $z=h$, les termes compris hors du signe $\int$ disparaissent en vertu de la seconde équation (10) ; à l'autre limite $z=0$, il se réduisent à

$$\frac{1}{g}\left(e^{m'h}+e^{-m'h}\right)\left(\frac{d^2\varphi'}{dt^2}+k'^2\varphi'\right),$$

en ayant égard à la troisième équation (10), appelant k' ce que devient k lorsqu'on change m en m', et désignant par φ' la valeur de φ qui répond à $z=0$. Nous aurons donc

$$\int_0^h\left(e^{m'(h-z)}+e^{-m'(h-z)}\right)\frac{d^2\varphi}{dz^2}dz$$

$$=m'^2u-\frac{1}{g}\left(e^{m'h}+e^{-m'h}\right)\left(\frac{d^2\varphi'}{dt^2}+k'^2\varphi'\right),$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{n^2u}{r^2}+m'^2u=\frac{1}{g}\left(e^{m'h}+e^{-m'h}\right)\left(\frac{d^2\varphi'}{dt^2}+k'^2\varphi'\right);$$

équations que nous pourrons écrire de cette autre manière :

$$\begin{gathered}\frac{d^2.u\sqrt{r}}{dr^2}-\left(n^2-\frac{1}{4}\right)\frac{u\sqrt{r}}{r^2}+m'^2u\sqrt{r}\\=\frac{1}{g}\left(e^{m'h}+e^{-m'h}\right)\left(\frac{d^2\varphi'\sqrt{r}}{dt^2}+k'^2\varphi'\sqrt{r}\right)\end{gathered}\qquad(15)$$

Je désigne par R' ce que devient R quand on y change m en m'. Au moyen de l'intégration par parties, on aura

$$\int \frac{\mathrm{d}.u\sqrt{r}}{\mathrm{d}r} R'\sqrt{r}\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\mathrm{d}\,u\sqrt{r}}{\mathrm{d}r} R'\sqrt{r} - u\sqrt{r}\,\frac{\mathrm{d}.R'\sqrt{r}}{\mathrm{d}t} + \int u\sqrt{r}\,\frac{\mathrm{d}^2.R'\sqrt{r}}{\mathrm{d}r^4}\,\mathrm{d}r\ ;$$

Les termes compris sous le signe $\int$ s'évanouissent avec r ; ils s'évanouissent également pour $r=a$, à cause que l'on a, à cette seconde limite,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=0\ , \qquad \frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}r}=0\ ;$$

on aura donc

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}^2.u\sqrt{r}}{\mathrm{d}r^2} R'\sqrt{r}\,\mathrm{d}r = \int_0^a \frac{\mathrm{d}^2.R\sqrt{r}}{\mathrm{d}r^2} u\sqrt{r}\,\mathrm{d}r\ ;$$

par conséquent, si l'on multiplie l'équation (15) par $R'\sqrt{r}\mathrm{d}r$, et qu'on intègre ses deux membres depuis $r=0$ jusqu'à $r=a$, il en résultera

$$\int_0^a \left[\frac{\mathrm{d}^2.R\sqrt{r}}{\mathrm{d}r^2} - \left(n^2-\frac{1}{4}\right)\frac{R'\sqrt{r}}{r^2} + m'^2R'\sqrt{r}\right]u\sqrt{r}\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{n}\left(e^{m'h}+e^{-m'h}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2.\int_0^a \varphi' R' r\,\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t^2} + k'^2\int_0^a \varphi' R' r\,\mathrm{d}r\right).$$

Mais, d'après l'équation (11), on a

$$\frac{\mathrm{d}^2.R'\sqrt{r}}{\mathrm{d}r^2} - \left(n^2-\frac{1}{4}\right)\frac{R'\sqrt{r}}{r^2} + m'^2R'\sqrt{r} = 0\ ;$$

ce qui fait disparaître le premier membre de l'équation précédente, et la réduit à

$$\frac{\mathrm{d}^2.\int_0^a \varphi' R' r \mathrm{d}r}{\mathrm{d}t^2} + k'^2 \int_0^a \varphi' R' r \mathrm{d}r = 0 .$$

L'intégrale complète de celle-ci est

$$\int_0^a \varphi' R' r \mathrm{d}r = P' \mathrm{Cos}.k't + Q' \mathrm{Sin}.k't \; ; \qquad (16)$$

P' et Q' désignant deux constantes arbitraires. Pour les déterminer, j'observe 1.° qu'à l'origine du mouvement, ou quand $t=0$, la valeur de $\frac{\mathrm{d}\varphi}{g\mathrm{d}t}$ qui répond à $z=0$, est donnée par l'équation (2) d'après la figure initiale du fluide; 2.° que si l'on a exercé à la surface une percussion quelconque, la valeur de φ est aussi donnée, d'après l'expression de cette force, pour $z=0$ et $t=0$. Si donc on fait $t=0$ et $z=0$, dans l'équation (8) et dans sa différentielle relative à t, les valeurs initiales de φ' et $\frac{\mathrm{d}\varphi'}{g\mathrm{d}t}$ seront aussi connues, et de la forme

$$\left.\begin{aligned} \varphi' &= \mathrm{F}r\mathrm{Cos}.n\psi + \mathrm{F}'r\mathrm{Sin}.n\psi \, , \\ \frac{\mathrm{d}\varphi'}{g\mathrm{d}t} &= \mathrm{f}r.\mathrm{Cos}.n\psi + \mathrm{f}'r.\mathrm{Sin}.n\psi \; ; \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

$\mathrm{F}r$, $\mathrm{F}'r$, $\mathrm{f}r$, $\mathrm{f}'r$, étant quatre fonctions de la seule variable r, qui seront données, dans chaque exemple particulier, depuis $r=0$ jusqu'à $r=a$. Cela étant, je fais $t=0$ dans l'équation (16) et dans sa différentielle relative à t; il vient

$$P' = \mathrm{Cos}.nt \int_0^a R' r \mathrm{F}r.\mathrm{d}r + \mathrm{Sin}.nt \int_0^a R' r \mathrm{F}'r.\mathrm{d}r \; ;$$

$$Q' = \frac{g\text{Cos}.nt}{k'} \int_0^a R'r\text{f}r.\text{d}r + \frac{g\text{Sin}\,nt}{k'} \int_0^a R'r\text{f}'r.\text{d}r\ ,$$

pour les valeurs demandées de P' et Q'. Il ne reste plus qu'à déterminer, d'après ces valeurs, celles des coefficiens P et Q, contenus dans la formule (14).

En faisant $z=0$, dans cette formule, on en déduit

$$\varphi' = \Sigma(P\text{Cos}.kt + Q\text{Sin}.kt)R(e^{mh}+e^{-mh})\ ;$$

expression que je substitue dans le premier membre de l'équation (16). Comme son second membre ne contient que le *cosinus* et le *sinus* de $k't$, il faudra, pour qu'elle soit identique, que les termes dépendans d'un autre angle kt disparaissent dans son premier membre ; ou, autrement dit, si m'^2 diffère de m^2, et, par suite k'^2 de k^2, il faudra qu'on ait

$$\int_0^a RR'r\text{d}r = 0\ . \qquad (18)$$

Dans le cas particulier de $m'=m$, et d'après les valeurs trouvées pour P' et Q', on aura en même temps

$$\left.\begin{array}{c} P(e^{mh}+e^{-mh})\displaystyle\int_0^a R^2r\text{d}r \\ = \text{Cos}.n\psi \displaystyle\int_0^a Rr\text{F}r.\text{d}r + \text{Sin}\,n\psi \int_0^a Rr\text{F}'r.\text{d}r\ , \\ Q(e^{mh}+e^{-mh})\displaystyle\int_0^a R^2r\text{d}r \\ = \dfrac{g\text{Cos}\,n\psi}{k} \displaystyle\int_0^a Rr\text{f}r.\text{d}r + \dfrac{g\text{Sin}.n\psi}{k} \int_0^a Rr\text{f}'r.\text{d}r\ ; \end{array}\right\} \quad (19)$$

ce qui détermine les valeurs des coefficiens P et Q, relativement à une racine quelconque m de l'équation (13).

La formule (14) ne contenant plus maintenant que des quantités connues, il en sera de même à l'égard de la formule (7), qui peut être écrite ainsi :

$$\varphi = \Sigma \varphi \,, \qquad (20)$$

la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs de n, depuis $n=0$ jusqu'à $n=\infty$, pourvu que l'on ne prenne que la moitié de son premier terme. Les différences partielles de cette expression de φ, relatives à t, z, r, ψ, feront connaître, à un instant quelconque, la figure de la surface du fluide, et les vîtesses de la molécule qui répond aux coordonnées z, r, ψ. En appelant p la pression, rapportée à l'unité de surface, qui a lieu au même point, on aura

$$p = gz - \frac{d\varphi}{dt} \,,$$

la densité du fluide étant prise pour unité; et cette pression étant supposée nulle à la surface. L'état du fluide est donc complètement déterminé, et la solution complète du problème proposé est donnée par la formule (20).

Cette expression de φ dépendra, en général, de deux sommations successives: l'une relative aux racines m de l'équation (13), et l'autre relative au nombre n. Au moyen de l'équation (18), on prouvera que ces racines sont toutes réelles, quel que soit le nombre n, qui entre dans l'équation (13). Je crois inutile de répéter ici cette démonstration qui se trouve déjà en plusieurs endroits de mes autres mémoires (*). Il en résulte que tous les termes de l'ex-

(*) Voy. aussi le *Bulletin de la société philomatique*, octobre 1826, pag. 145.

pression de φ sont périodiques, ce qui devait être, en effet, puisque le fluide a été écarté d'un état d'équilibre *stable*. Mais, pour que tous les points reviennent ensemble au même état, et qu'il exécute des oscillations isochrones, il faudra, à cause que les valeurs de k sont incommensurables, que tous les termes de la double somme qui donne la valeur de φ, se réduisent à un seul, et que tous les autres soient nuls, en vertu de l'état initial du fluide.

(7) Si le fluide n'a reçu, à l'origine, aucune percussion, et que les molécules soient parties de l'état de repos, la valeur initiale de φ sera nulle, et il en résultera $\mathrm{F}r=0$, $\mathrm{F}'r=0$ et $P=0$. Supposons de plus qu'à l'origine du mouvement, on ait fait prendre à l'eau la forme d'un solide de révolution, dont l'axe soit celui même du vase qui la contient; il est évident qu'elle conservera constamment une semblable forme, et que la fonction φ sera indépendante de l'angle ψ. En vertu de l'équation (8), la quantité v sera nulle pour toutes les valeurs de n, excepté pour $n=0$; les deux quantités v et φ ne différeront pas l'une de l'autre; pour $n=0$, on aura

$$R=\int_0^{\varpi}\mathrm{Cos.}(mr\,\mathrm{Cos.}\omega)d\omega\;; \qquad (21)$$

et, si l'on supprime le coefficient P dans la formule (14), elle deviendra

$$\varphi=\Sigma Q\left(e^{m(h-z)}+e^{-m(h-z)}\right)\left(\int_0^{\varpi}\mathrm{Cos.}(mr\,\mathrm{Cos.}\omega)d\omega\right)\mathrm{Sin.}kt.$$

En y substituant pour Q sa valeur relative à $n=0$, et donnée par la seconde équation (17), on aura

$$\varphi=g\Sigma\,\frac{\int_0^a Rr\mathrm{f}r.dr}{\int_0^a R^2 r dr}\left(\int_0^{\varpi}\mathrm{Cos.}(mr\,\mathrm{Cos.}\omega)d\omega\right)Z\,\frac{\mathrm{Sin.}kt}{k}\;, \qquad (22)$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\frac{e^{m(h-z)}+e^{-m(h-z)}}{e^{mh}+e^{-mh}}=Z\ ,$$

et conservé la lettre R à la place de sa valeur donnée par l'équation (21).

L'expression de φ ne dépend, comme on voit, dans ce cas particulier, que d'une seule somme Σ, qui répond aux valeurs de m tirées de l'équation (17), et relatives à $n=0$, ce qui réduit cette équation à

$$\int_0^{\varpi} \text{Sin.}(ma\text{Cos.}\omega)\text{Cos.}\omega.d\omega=0\ , \qquad (23)$$

ou, ce qui est la même chose, à

$$1-\frac{2x}{(1.2)^2}+\frac{3x^2}{(1.2.3)^2}-\frac{4x^3}{(1.2.3.4)^2}+\frac{5x^4}{(1.2.3.4.5)^2}-\ldots\ldots=0\ ,$$

en développant son premier membre suivant les puissances de ma, supprimant le facteur ma commun à tous ses termes, et faisant $m^2a^2=4x$.

Si l'on fait $n=0$, dans la seconde équation (17), on a

$$\frac{dv'}{gdt}=\mathrm{f}r\ ,$$

pour $t=0$; et, comme v' est la valeur de v ou de φ qui répond à $z=0$, il résulte de l'équation (2) que fr est la valeur de z' relative à $t=0$. Ainsi, la fonction fr, donnée arbitrairement, que renferme l'équation (22), est l'ordonnée d'un point quelconque de la surface de l'eau à l'origine de son mouvement. D'après cela, si l'on fait $t=0$ et $z=0$, dans l'équation (22) différenciée par rapport à t, on en conclura

$$\mathrm{f}r = \Sigma \frac{\int_0^a R r \mathrm{f}r . \mathrm{d}r}{\int_0^a R^2 r \mathrm{d}r} \left(\int_0^{\pi} \mathrm{Cos.}(mr\mathrm{Cos.}\omega) \mathrm{d}\omega \right) ;$$

et cette expression en série sera propre à représenter la fonction fr, pour toutes les valeurs de la variable, depuis $r=0$ jusqu'à $r=a$.

L'une des racines de l'équation (23) est $m=0$; pour cette valeur de m on a

$$Z=1 , \quad R=\varpi , \quad k=0 , \quad \frac{\mathrm{Sin}.kt}{k}=t ,$$

et, par conséquent,

$$\varphi = \frac{gt}{\varpi a^2} \Sigma \left(2\varpi \int_0^a r \mathrm{f}r . \mathrm{d}r \right) ;$$

mais, à cause de l'incompressibilité du fluide, le volume que représente $2\varpi \int_0^a r\mathrm{f}r.\mathrm{d}r$ doit être égal à zéro, le terme de φ qui répond à $m=0$ est donc aussi nul ; et c'est pour cela que nous avons fait abstraction de cette racine de l'équation (23) en développant son premier membre.

(8) Observons, en terminant ce mémoire, que, si l'on différencie l'équation (2) par rapport à r, et qu'on ait égard à l'équation (6), on en conclura

$$\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}r} = 0 ,$$

pour $r=a$. Si donc on coupe la surface du fluide par un plan passant par l'axe du cylindre, les tangentes aux extrémités de la courbe d'intersection, c'est-à-dire, aux points où cette courbe rencontre la surface du vase, demeureront constamment horizontales, pendant toute la durée du mouvement. Il faudra donc que cette condition soit remplie par l'état initial et arbitraire de la surface : si elle ne l'était pas, les mêmes molécules du fluide ne resteraient pas adjacentes à la surface latérale du vase, du moins pendant les premiers instans du mouvement qui ne pourrait plus être déterminé par les formules précédentes. Cette restriction provient, comme on voit, des équations différentielles du problème que nous avons empruntées de la *Mécanique analytique*. Il en résulte que le cas, qui paraît le plus simple, où le fluide est terminé à l'origine du mouvement, par un plan incliné, échappe cependant à l'analyse fondée sur ces équations.

Lorsque la surface du fluide sera celle d'un solide de révolution, ses plans tangens extrêmes seront constamment horizontaux, et il faudra qu'à l'origine du mouvement cette surface et celle du vase se coupent à angle droit. Ainsi, dans les formules du numéro précédent la fonction arbitraire $\mathrm{f}r$ devra être telle que l'on ait $\frac{d.\mathrm{f}r}{dr}=0$ pour $r=a$.

N. B. Dans un mémoire déposé au secrétariat de l'Institut, M. Corancez s'est occupé, avant moi, des oscillations de l'eau contenue dans un vase cylindrique ou prismatique. J'ai cru cependant pouvoir publier la solution précédente du cas où le vase est un cylindre, parce qu'elle m'a paru plus simple et plus complète que celle de M. Corancez qui n'a pas déterminé les quantités arbitraires que contiennent les intégrales, d'après un état quelconque du fluide à l'origine du mouvement.