ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Géométrie de situation. Note sur le nombre des conditions nécessaires pour que quatre droites appartiennent à une même surface du second ordre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 241-245
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__241_0>

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Note sur le nombre des conditions nécessaires pour que quatre droites appartiennent à une même surface du second ordre ;

Par M. GERGONNE.

A la pag. 335 du précédent volume, M. Bobillier a démontré que, *si deux tétraèdres sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même surface du second ordre, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact des faces du circonscrit ; les faces respectivement opposées, dans les deux tétraèdres se coupent suivant quatre droites qui appartiennent à une même surface du second ordre ;* proposition à laquelle, au surplus, M. Steiner était aussi parvenu de son côté.

Faute d'avoir remarqué qu'assujettir une surface courbe à toucher un plan donné en un point donné, c'était réellement l'assujettir à *trois* conditions, et non pas à *deux*, je signalais ce théorème comme présentant quelque chose de paradoxal. Je supposais en effet, deux tétraèdres inscrit et circonscrit l'un à l'autre, d'une manière tout à fait arbitraire, de manière à ne point satisfaire à la condition énoncée ; et je croyais qu'on pourrait toujours concevoir une infinité de surfaces du second ordre à la fois circonscrites à l'un et inscrites à l'autre ; attendu, disais-je, que c'est les assujettir à *huit* conditions seulement, et qu'il en faut *neuf* pour déterminer complètement une surface du second ordre.

MM. Bobillier et Chasles n'ont pas tardé de me faire apercevoir de mon inadvertance, et dès lors j'ai vu clairement que deux tétraèdres étant inscrit et circonscrit l'un à l'autre, assujettir une surface du second ordre à être à la fois circonscrite à l'un et inscrite à l'autre, c'était réellement l'assujettir à *douze* conditions, au lieu de *neuf* qui sont nécessaires pour déterminer une telle surface; que conséquemment le problème n'était résoluble qu'autant que les deux tétraèdres étaient choisis d'une manière convenable, et qu'il n'était pas surprenant, d'après cela, qu'ils dussent satisfaire à la condition énoncée dans le théorème de MM. Steiner et Bobillier.

Mais regardant, mal à propos, cette condition comme unique (pag. 35 du présent volume); après avoir d'abord reproché au théorème de dire trop, je lui reprochai ensuite de ne dire point assez. Peu après, M Chasles ayant démontré (pag. 67) que *les droites qui joignent les sommets respectivement opposés, dans les deux tétraèdres, appartiennent aussi à une même surface du second ordre*, j'ai cru, dans ma fausse préoccupation, pouvoir signaler ce nouveau théorème comme le complément que j'avais désiré pour le premier.

Mais, par une lettre en date du 5 novembre 1828, M. le docteur Plucker me fait observer, avec beaucoup de raison, que ce dernier théorème n'est qu'une conséquence inévitable du premier qui, à son tour, peut réciproquement en être déduit, de telle sorte que, *si deux tétraèdres, inscrit et circonscrit l'un à l'autre, sont tels que les droites suivant lesquelles se coupent les plans de leurs faces respectivement opposées appartiennent toutes quatre à une même surface du second ordre, les droites qui joindront leurs sommets respectivement opposés appartiendront aussi toutes quatre à une même surface du second ordre, et réciproquement;* attendu que ces deux théorèmes sont polaires réciproques l'un de l'autre; et M. Bobillier m'a fait postérieurement la même remarque.

MM. Plucker et Bobillier me font observer, en outre, que chacun de ces deux théorèmes, pris isolément, est complet, c'est-à-dire, qu'il ne dit ni trop ni trop peu ; attendu qu'assujettir quatre droites à appartenir à une même surface du second ordre, c'est réellement les assujettir à trois conditions.

En effet, on peut, à l'aide des équations de trois de ces droites, trouver l'équation de la surface du second ordre qu'elles déterminent ; et, si l'on suppose que les équations de la quatrième sont

$$x=mz+g\ ,\qquad y=nz+h\ ,$$

il faudra que les valeurs qu'elles donnent pour x et y, substituées dans l'équation de cette surface, conduisent à une équation qui laisse z indéterminé ; mais, cette équation étant du second degré, il faudra que le coefficient de z^2, celui de z et le terme sans z soient séparément nuls, ce qui donnera bien trois conditions distinctes.

Au surplus, comme suivant la maxime des écoles : *Ab actu ad posse valet consecutio*, la manière la plus lumineuse de prouver qu'assujettir quatre droites à appartenir à une même surface du second ordre c'est les assujettir à trois conditions distinctes, c'est incontestablement de produire ces trois conditions. Le calcul en serait assez compliqué si l'on supposait les axes des ordonnées situés d'une manière quelconque, par rapport à ces quatre droites ; mais, en les choisissant d'une manière convenable, on peut parvenir au but par un calcul très-simple et très-symétrique.

Soient, en effet, quatre droites indéfinies, que nous supposons n'être assujetties qu'à la seule condition d'appartenir à une surface du second ordre. Prenons l'origine en un point quelconque de l'une d'elles et les axes respectivement parallèles aux trois autres ; ces trois dernières déterminent une certaine surface du second ordre, et il s'agit d'exprimer que la quatrième est tout entière dans cette surface.

Ces choses ainsi entendues, considérons l'équation

$$(x-a)(y-b)(z-c)=(x-a')(y-b')(z-c') \ , \qquad (1)$$

elle n'est évidemment que du second degré, et exprime conséquemment une surface du second ordre; or, on y satisfait par ces trois systèmes d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} y=b \ , \\ z=c' \ ; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} z=c \ , \\ x=a' \ ; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=a \ , \\ y=b' \ ; \end{array}\right. \qquad (2)$$

lesquelles expriment des droites respectivement parallèles aux trois axes, qu'on peut toujours supposer être trois de nos droites; d'où il suit que l'équation (1) est celle de la surface du second ordre déterminée par ces trois droites. En la développant, elle devient

$$\begin{array}{l} (a-a')yz-(bc-b'c')x \\ +(b-b')zx-(ca-c'a')y-(abc-a'b'c')=0 \ . \qquad (3) \\ +(c-c')xy-(ab-a'b')z \end{array}$$

Présentement, la quatrième droite, passant par l'origine, doit avoir des équations de la forme

$$\frac{x}{a''}=\frac{y}{b''}=\frac{z}{c''} \ , \qquad (4)$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{a''}{c''}z \ , \qquad y=\frac{b''}{c''}z \ ;$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (3), la changent en celle-ci,

$$\left.\begin{array}{r}\{b''c''(a-a')+c''a''(b-b')+a''b''(c-c')\}z^2\\ -c''\{a''(bc-b'c')+b''(ca-c'a')+c''(ab-a'b')\}z\\ -c''^2(abc-a'b'c')=0\ ;\end{array}\right\}\quad(5)$$

afin donc que la droite (4) soit entièrement dans la surface déterminée par les trois droites (2), il faut que l'équation (5) laisse z absolument indéterminée ; ce qui exige qu'on ait à la fois

$$\left.\begin{array}{r}b''c''(a-a')+c''a''(b-b')+a''b''(c-c')=0\ ,\\ a''(bc-b'c')+b''(ca-c'a')+c''(ab'-a'b')=0\ ,\\ abc-a'b'c'=0\ ;\end{array}\right\}\quad(6)$$

telles sont donc les trois équations qui expriment que les quatre droites (2) et (4) appartiennent à une même surface du second ordre.