ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BARY

Géométrie des courbes. Note sur la quadrature des sections coniques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 245-249
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__245_1>

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Note sur la quadrature des sections coniques ;

Par M. Bary, professeur suppléant de physique au Collége royal de Charlemagne, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

On peut parvenir assez rapidement à la quadrature des trois sections coniques, 1.° en considérant l'ellipse comme la projection d'un cercle ; 2.° en considérant la parabole comme une ellipse dont le grand axe est infini ; 3.° enfin, en considérant l'hyperbole comme une ellipse dont le petit axe est imaginaire. C'est ce que nous nous proposons de faire voir dans ce qui va suivre.

I. En considérant l'ellipse comme la projection orthogonale d'un cercle, et se rappelant que l'aire de la projection d'une figure plane sur un plan quelconque est le produit de l'aire de cette figure par le cosinus tabulaire de l'angle des deux plans, on prouve facilement que l'aire d'une ellipse est équivalente à celle d'un cercle dont le rayon serait moyen proportionnel entre ses deux demi-axes.

La même considération prouve aussi que les coordonnées perpendiculaires à l'un des axes d'une ellipse ne sont autre chose que les ordonnées du cercle décrit sur cet axe comme diamètre, augmentées ou diminuées dans le rapport des deux axes de l'ellipse; et on conclut aisément de là que, *si un cercle et une ellipse ont un axe commun, les segmens des deux courbes répondant à une même abscisse seront aussi entre eux dans le rapport des deux axes.*

Rien n'est plus facile d'après cela que d'obtenir l'expression de l'aire d'un demi-segment elliptique, borné par une perpendiculaire à son grand axe. Soient a et b les demi-axes de l'ellipse ; soit y la perpendiculaire qui termine le segment, et x l'abscisse correspondante. Soit décrit un cercle sur le diamètre $2a$, l'ordonnée y prolongée déterminera un demi-segment circulaire, et nous aurons

$$\text{Demi-ség. ellipt.} = \frac{a}{b} \text{ demi-ség. circul.}$$

Le demi-segment circulaire est l'excès d'un secteur sur un triangle; et comme, en désignant par y' l'ordonnée du cercle correspondant à l'ordonnée y de l'ellipse, on a $y' = \frac{a}{b}y$, il s'ensuit que le sinus de l'angle du demi-secteur qui est $\frac{y'}{a}$ pourra aussi être exprimé par $\frac{y}{b}$; l'aire de ce demi-secteur sera donc $\frac{1}{2}a^2\text{Arc.}\left(\text{Sin.}=\frac{y}{b}\right)$. Pour en conclure celle du segment il faudra en retrancher l'aire d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont $a-x$ et $y'=\frac{a}{b}y$; c'est-à-dire, qu'il faudra en retrancher $\frac{1}{2}\frac{a(a-x)y}{b}$; l'aire du demi-secteur circulaire sera donc

$$\tfrac{1}{2}a\left\{a\text{Arc}\left(\text{Sin.}=\frac{y}{b}\right)-\frac{(a-x)y}{b}\right\} ;$$

en la multipliant par le rapport $\frac{a}{b}$, on en conclura pour l'aire du demi-secteur elliptique.

$$\tfrac{1}{2}ab\text{Arc}\left(\text{Sin.}=\frac{y}{b}\right)-\tfrac{1}{2}(a-x)y \ ; \qquad (1)$$

si l'on veut compter les abscisses du centre, on pourra écrire

$$\tfrac{1}{2}ab\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{x}{y}\right)-\tfrac{1}{2}xy \ .$$

On sait que

$$\text{Arc}\left(\text{Sin.}=\frac{y}{b}\right)=\frac{y}{b}+\frac{1.y^3}{2.3.b^3}+\frac{1\ 2.y^5}{2.4.5.b^5}+\frac{1.3.5.y^7}{2.4.6.7.b^7}+\ldots\ldots$$

en substituant cette valeur dans la formule (1) et remplaçant b^2 par $\frac{pa}{2}$, p étant le paramètre, il viendra, en réduisant, pour l'expression du demi-segment elliptique

$$\frac{xy}{2}+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{y^3}{p}+2.\frac{1.3}{2.4.5}\cdot\frac{y^6}{p^2a}+4.\frac{1.3.5}{2.4.6.7}\cdot\frac{y^7}{p^3a^2}+\ldots\ldots$$

Si l'on suppose a infini, on passe à la parabole, et cette expression se réduit à

$$\frac{xy}{2}+\frac{y^3}{6p}=\frac{xy}{2}+\frac{pxy}{6p}=\frac{xy}{2}+\frac{xy}{6}=\frac{2}{3}xy\ ;$$

c'est-à-dire, que *l'aire du demi-segment parabolique est les deux tiers de celle du rectangle des deux coordonnées.*

On sait que

$$\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{y}{x}\right)=\frac{x}{y}-\frac{1}{3}\frac{y^3}{x^3}+\frac{1}{5}\frac{y^5}{x^5}-\frac{1}{7}\frac{y^7}{x^7}+\ldots;$$

substituant dans la formule (2), nous aurons pour l'expression du demi-segment elliptique

$$\tfrac{1}{2}ab\left(\frac{y}{x}-\frac{1}{3}\frac{y^3}{x^3}+{}_5\frac{y^5}{x^5}-\frac{1}{7}\frac{y^7}{x^7}+\ldots\right)-\tfrac{1}{2}xy\ ;$$

Si, dans cette expression, on change y en $y\sqrt{-1}$, on passera au demi-segment hyperbolique pour lequel on trouvera ainsi

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left\{\left(\frac{y}{x}+\frac{1}{3}\frac{y^3}{x^3}+\frac{1}{5}\frac{y^5}{x^5}+\frac{1}{7}\frac{y^7}{x^7}+\ldots\ldots\right)-xy\right\}$$

ou bien

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left\{\mathrm{l}.\,\frac{x+y}{x-y}-xy\right\}.$$

Pour conclure de là l'aire du demi-segment réel, il faudra d'abord supprimer le facteur $\sqrt{-1}$ et changer ensuite les signes à raison du changement de situation, ce qui donnera

$$\tfrac{1}{2}xy-\tfrac{1}{2}\mathrm{l}.\,\frac{x+y}{x-y}\ .$$

Or, $\frac{1}{2}xy$ est l'aire du triangle construit sur les coordonnées, d'où il suit que $\frac{1}{2}\mathrm{l}.\,\frac{x+y}{x-y}$ est l'aire du demi-secteur hyperbolique.