BOBILLIER

Géométrie. Note sur deux théorèmes de géométrie démontrés dans le XVIII.me volume du présent recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 249-251
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__249_1>

GÉOMÉTRIE.

Note sur deux théorèmes de géométrie démontrés dans le XVIII.me volume du présent recueil ;

Par M. BOBILLIER.

IL a été démontré, à la pag. 368 du XVIII.me volume des *Annales*, 1.° que, dans toute ligne du second ordre qui a un centre, la somme des carrés des inverses de deux diamètres perpendiculaires l'un à l'autre est une quantité constante ; 2.° que, dans toute surface du second ordre qui a un centre, la somme des carrés des inverses de trois diamètres dont chacun est perpendiculaire aux deux autres, est également une quantité constante.

La livraison des *Annales* qui renferme la démonstration de ces deux théorèmes n'avait point encore paru lorsque j'adressai à M. Quetelet un mémoire publié dans la *Correspondance* de Bruxelles (tom. IV, 4.me livraison, pag. 216), dans lequel ces deux théorèmes se trouvaient aussi incidemment démontrés. J'ai reconnu postérieurement qu'ils pouvaient être démontrés sans calcul, ainsi qu'on va le voir.

I. Soient A, B les deux demi-axes d'une conique, et a, b deux demi-diamètres rectangulaires quelconques. Si l'on prend pour directrice un cercle de même centre, dont r soit le rayon, les demi-axes de la polaire réciproque de la conique seront $\frac{r^2}{A}$, $\frac{r^2}{B}$; les tangentes, polaires des extrémités des demi-diamètres a, b seront rectangulaires et distantes du centre des quantités $\frac{r^2}{a}$, $\frac{r^2}{b}$; le carré de la distance de leur point d'intersection au centre sera donc $\frac{r^4}{a^2}+\frac{r^4}{b^2}$. Mais on sait d'ailleurs que ce point, sommet d'un angle droit circonscrit à la courbe polaire réciproque de la proposée, est sur une circonférence dont le carré du rayon est $\frac{r^4}{A^2}+\frac{r^4}{B^2}$; on doit donc avoir

$$\frac{r^4}{a^2}+\frac{r^4}{b^2}=\frac{r^4}{A^2}+\frac{r^4}{B^2}\ ;$$

c'est-à-dire simplement

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}\ ;$$

ce qui est précisément le premier des deux théorèmes.

II. Soient A, B, C les demi-axes d'une surface du second ordre, et a, b, c trois demi-diamètres d'une telle surface dont chacun soit perpendiculaire aux deux autres. Si l'on prend pour directrice une sphère de même centre, dont r soit le rayon, les demi-axes de la polaire réciproque de la surface proposée seront $\frac{r^2}{A}$, $\frac{r^2}{B}$, $\frac{r^2}{C}$; les plans tangens polaires des extrémités des demi-diamètres a, b, c seront rectangulaires, et distans du centre des quantités $\frac{r^2}{a}$, $\frac{r^2}{b}$, $\frac{r^2}{c}$; le carré de la distance de leur point d'intersection au centre sera donc $\frac{r^4}{a^2}+\frac{r^4}{b^2}+\frac{r^4}{c^2}$. Mais on sait d'ailleurs que ce point, sommet d'un angle trièdre tri-rectangle, circonscrit à la surface polaire réciproque de la proposée, est sur une sphère dont le carré du rayon est $\frac{r^4}{A^2}+\frac{r^4}{B^2}+\frac{r^4}{C^2}$; on doit donc avoir

$$\frac{r^4}{a^2}+\frac{r^4}{b^2}+\frac{r^4}{c^2}=\frac{r^4}{A^2}+\frac{r^4}{B^2}+\frac{r^4}{C^2} ;$$

c'est-à-dire simplement

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2} ;$$

ce qui est précisément le second des deux théorèmes.