

---

---

# ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

---

---

BOBILLIER

**Géométrie de situation. Théorèmes sur les polaires successives**

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 19 (1828-1829), p. 302-307

[http://www.numdam.org/item?id=AMPA\\_1828-1829\\_\\_19\\_\\_302\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__302_0)

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1828-1829, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



---

## GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

### *Théorèmes sur les polaires successives ;*

Par M. BOBILLIER , professeur à l'école des arts et métiers de  
Châlons-sur-Marne.



SOIENT

$$M=0 , \quad M_1=0 , \quad M_2=0 , \quad \dots \dots M_{m-n}=0 , \quad \dots \dots M_n=0$$

les équations d'une suite de courbes des  $m$ .<sup>ième</sup>,  $(m-1)$ .<sup>ième</sup>,  $(m-1)$ .<sup>ième</sup>...  $(m-n)$ .<sup>ième</sup>, .....  $n$ .<sup>ième</sup> degrés, dont la première seule soit arbitraire, et dont chacune soit, par rapport à celle qui la précède immédiatement, considérée comme directrice, la *courbe polaire* d'un point donné  $(x', y')$ ; ces courbes sont ce que nous appellerons les *polaires successives* de ce point, par rapport à cette directrice, et nous les désignerons sous les dénominations de 1.<sup>ière</sup>, 2.<sup>ème</sup>, 3.<sup>ème</sup>, .....  $(m-n)$ .<sup>ième</sup>, .....  $n$ .<sup>ième</sup> polaires du point  $(x', y')$ .

D'après un théorème précédemment démontré ( pag. 106 ), nous aurons

$$M_1 = m M - \frac{dM}{dx} (x-x') - \frac{dM}{dy} (y-y') ,$$

$$M_2 = (m-1) M_1 - \frac{dM_1}{dx} (x-x') - \frac{dM_1}{dy} (y-y') ,$$

$$M_3 = (m-2) M_2 - \frac{dM_2}{dx} (x-x') - \frac{dM_2}{dy} (y-y') ,$$

. . . . . ,

$$M_n = (m - n + 1)M_{n-1} - \frac{dM_{n-1}}{dx} (x - x') - \frac{dM_{n-1}}{dy} (y - y').$$

A l'aide de cette suite d'équations, il nous sera facile, par des différentiations et substitutions successives d'obtenir tour à tour les valeurs de  $M_2, M_3, \dots M_n$ , en fonction de  $M$ , en égalant la dernière à zéro, et posant, pour abrégé,

$$1.2.3.\dots.k = k!$$

nous trouverons, pour l'équation de la  $n^{\text{ème}}$  polaire du point  $(x', y')$ , par rapport à la directrice  $M=0$ ,

$$0 = \left\{ \begin{aligned} &\frac{m!}{n!} M \\ - &\frac{(m-1)!}{(n-1)!} \left\{ \frac{dM}{dx} \frac{(x-x')}{1} + \frac{dM}{dy} \frac{(y-y')}{1} \right\} \\ + &\frac{(m-2)!}{(n-2)!} \left\{ \frac{d^2M}{dx^2} \frac{(x-x')^2}{1.2} + \frac{d^2M}{dx dy} \frac{(x-x')}{1} \frac{(y-y')}{1} + \frac{d^2M}{dy^2} \frac{(y-y')^2}{1.2} \right\} \\ - &\dots\dots\dots? \\ + &\frac{(m-n)!}{1} \left\{ \frac{d^n M}{dx^n} \frac{(x-x')^n}{n!} + \frac{d^n M}{dx^{n-1} dy} \frac{(x-x')^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(y-y')}{1} + \dots + \frac{d^n M}{dy^n} \frac{(y-y')^n}{n!} \right\} \end{aligned} \right.$$

Supposons que le point  $(x', y')$  étant indéterminé, on veuille le déterminer de telle sorte que cette polaire passe par un point donné  $(x'', y'')$ , il faudra pour cela exprimer que l'équation ci-dessus est satisfaite en changeant simultanément  $x$  et  $y$  en  $x''$  et  $y''$ . Changeant ensuite respectivement  $x'$  et  $y'$  en  $x$  et  $y$ , on trouvera pour l'équation du lieu du point  $(x', y')$

$$(P) \quad 0 = \left\{ \begin{aligned} & \frac{m!}{n!} M'' \\ & + \frac{(m-1)!}{(n-1)!} \left\{ \frac{dM''}{dx''} \frac{(x-x'')}{1} + \frac{dM''}{dy''} \frac{(y-y'')}{1} \right\} \\ & + \frac{(m-2)!}{(n-2)!} \left\{ \frac{d^2M''}{dx''^2} \frac{(x-x'')^2}{1.2} + \frac{d^2M''}{dx''dy''} \frac{(x-x'')}{1} \frac{(y-y'')}{1} + \frac{d^2M''}{dy''^2} \frac{(y-y'')^2}{1.2} \right\} \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \frac{(m-n)!}{1} \left\{ \frac{d^n M''}{dx''^n} \frac{(x-x'')^n}{n!} + \frac{d^n M''}{dx''^{n-1} dy''} \frac{(x-x'')^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(y-y'')}{1} + \dots + \frac{d^n M''}{dy''^n} \frac{(y-y'')^n}{n!} \right\} \end{aligned} \right.$$

Si, présentement, on représente généralement par  $u_k$  une fonction homogène du  $k^{i\text{ème}}$  degré en  $x$  et  $y$ , toute courbe du  $m^{i\text{ème}}$  degré aura une équation de la forme

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots + u_m = 0.$$

Si l'on cherche les polaires successives de l'origine, par rapport à cette courbe prise pour directrice, au moyen des considérations exposées à la pag. 89 du précédent volume, on trouvera facilement, pour l'équation de la  $(m-n)^{\text{ème}}$  polaire,

$$\frac{m!}{n!} u_0 + \frac{(m-1)!}{(n-1)!} u_1 + \frac{(m-2)!}{(n-2)!} u_2 + \dots + \frac{(m-n)!}{1} u_n = 0.$$

En conséquence, pour obtenir l'équation de la  $(m-n)^{\text{ème}}$  polaire d'un point  $(x'', y'')$ , relativement à la directrice  $M=0$ , il faudra d'abord transporter l'origine en ce point, en changeant respectivement dans  $M$ ,  $x$  et  $y$  en  $x+x''$  et  $y+y''$ , et développer; puis dans le développement multiplier respectivement les termes de 0, 1, 2, .....  $n$  dimensions par

$$\frac{m!}{n!}, \quad \frac{(m-1)!}{(n-1)!}, \quad \frac{(m-2)!}{(n-2)!}, \quad \dots \dots \dots \quad \frac{(m-n)!}{1},$$

et supprimer tous ceux de dimensions plus élevées ; après quoi , il faudra remplacer respectivement  $x$  et  $y$  par  $x-x''$  et  $y-y''$  , afin de retourner à l'origine primitive. Or, il est visible que l'équation résultante ne sera autre chose que l'équation (P) ci-dessus. En invoquant donc le principe de dualité , on obtiendra les deux théorèmes que voici :

*THÉORÈME I. Si, par rapport à une même directrice du  $(p+q)^{i\text{ème}}$  degré, on détermine la  $p^{i\text{ème}}$  polaire d'un point P et la  $q^{i\text{ème}}$  polaire d'un point Q, et que l'un quelconque de ces deux points ait été choisi sur la polaire de l'autre, ce dernier point se trouvera réciproquement sur la polaire du premier (\*).*

*THÉORÈME I. Si, par rapport à une même directrice de  $(p+q)^{i\text{ème}}$  classe, on détermine la  $p^{i\text{ème}}$  polaire d'une droite P et la  $q^{i\text{ème}}$  polaire d'une droite Q, et que l'une quelconque de ces deux droites ait été choisie tangente à la polaire de l'autre, cette dernière droite se trouvera réciproquement tangente à la polaire de la première.*

Si l'on fait  $p=m-1$  et  $q=1$ , on retombe sur le théorème de la pag. 157 du précédent volume, qui n'est ainsi qu'un cas très-particulier de celui-ci.

Au moyen de ces deux théorèmes, on pourra résoudre les deux problèmes que voici :

*PROBLÈME I. Trouver, sur le plan d'une directrice donnée du  $m^{i\text{ème}}$  degré, un point dont la*

*PROBLÈME I. Trouver, sur le plan d'une directrice donnée de  $m^{i\text{ème}}$  classe, une droite dont*

---

(\*) M. Plucker nous a adressé postérieurement, sans démonstration, un théorème tout à fait analogue.

$n^{\text{ième}}$  polaire, relative à cette directrice, passe par deux points donnés ?

Si, en effet, on détermine, par rapport à la directrice proposée, les  $(m-n)^{\text{ièmes}}$  polaires des deux points donnés, il résulte de notre théorème que les  $n^{\text{ièmes}}$  polaires de leurs intersections, relatives à la même directrice, passeront par les deux points donnés. Et, comme les  $(m-n)^{\text{ièmes}}$  polaires des deux points donnés seront l'une et l'autre du  $n^{\text{ième}}$  degré, le problème aura  $n^2$  solutions.

la  $n^{\text{ième}}$  polaire, relative à cette directrice, touche deux droites données ?

Si, en effet, on détermine, par rapport à la directrice proposée, les  $(m-n)^{\text{ièmes}}$  polaires des deux droites données, il résulte de notre théorème que les  $n^{\text{ièmes}}$  polaires de leurs tangentes communes, relatives à la même directrice, toucheront les deux droites données. Et, comme les  $(m-n)^{\text{ièmes}}$  polaires des deux droites données seront l'une et l'autre de  $n^{\text{ième}}$  classe, le problème aura  $n^2$  solutions.

En appliquant aux fonctions de trois variables  $x, y, z$  les considérations qui nous ont guidés dans ce qui précède, on parviendra, sans autre peine que celle d'écrire des développemens, à établir les deux théorèmes que voici :

**THÉORÈME II.** Si, par rapport à une même surface directrice du  $(p+q)^{\text{ième}}$  degré, on détermine la  $p^{\text{ième}}$  polaire d'un point P et la  $q^{\text{ième}}$  polaire d'un point Q, et que l'un quelconque de ces deux points ait été choisi sur la polaire de l'autre, ce dernier point se trouvera réciproquement sur la polaire du premier.

**THÉORÈME II.** Si, par rapport à une même surface directrice de  $(p+q)^{\text{ième}}$  classe, on détermine la  $p^{\text{ième}}$  polaire d'un plan P et la  $q^{\text{ième}}$  polaire d'un plan Q, et que l'un quelconque de ces deux plans ait été choisi tangent à la polaire de l'autre, ce dernier plan se trouvera réciproquement tangent à la polaire du premier.

Si l'on fait  $p=m-1$  et  $q=1$ , on retombe sur le théorème de la pag. 164 du précédent volume, qui n'est ainsi qu'un cas très-particulier de celui-ci.

Au moyen de ces deux théorèmes, on pourra résoudre les deux problèmes que voici :

*PROBLÈME II. Une surface directrice du  $m^{\text{ième}}$  degré étant donnée, trouver, dans l'espace, un point dont la  $n^{\text{ième}}$  polaire, relative à cette surface, passe par trois points donnés ?*

Si, en effet, on détermine, par rapport à la surface directrice proposée, les  $(m-n)^{\text{ièmes}}$  polaires des trois points donnés, il résulte de notre théorème que les  $n^{\text{ièmes}}$  polaires de leurs intersections, relatives à la même directrice, passeront par les trois points donnés. Et, comme les  $(m-n)^{\text{ièmes}}$  polaires des trois points donnés seront toutes trois du  $n^{\text{ième}}$  degré, le problème aura  $n^3$  solutions.

*PROBLÈME II. Une surface de  $m^{\text{ième}}$  classe étant donnée, trouver, dans l'espace, un plan dont la  $n^{\text{ième}}$  polaire, relative à cette surface, touche trois plans donnés ?*

Si, en effet, on détermine, par rapport à la surface directrice proposée, les  $(m-n)^{\text{ièmes}}$  polaires des trois plans donnés, il résulte de notre théorème que les  $n^{\text{ièmes}}$  polaires de leurs plans tangens communs, relatives à la même directrice, toucheront les trois plans donnés. Et, comme les  $(m-n)^{\text{ièmes}}$  polaires des trois plans donnés seront toutes trois de  $n^{\text{ième}}$  classe, le problème aura  $n^3$  solutions.

Châlons, le 20 avril 1828.