
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Géométrie de situation. Sur le théorème d'Euler relatif aux polyèdres

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 333-338

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__333_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1828-1829, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Sur le théorème d'Euler relatif aux polyèdres ;

Par M. GERGONNE.



ON a vu dans le III.^me volume du présent recueil (pag. 169) que ce n'est qu'après des tentatives réitérées qu'Euler est parvenu à établir, d'une manière à la fois complète et générale, son curieux théorème sur la relation constante entre le nombre des faces, celui des sommets et celui des arêtes d'un polyèdre quelconque. On

sait que, dans ces derniers temps, M. Cauchy a démontré, d'une manière beaucoup plus simple, un autre théorème dont celui d'Euler n'est qu'un cas particulier.

En suivant une marche un peu différente, M. le docteur J. A. Gruner, de Torgau, dans le II.^me volume du précieux recueil de M. Crelle (pag. 367), est parvenu à démontrer le théorème d'Euler d'une manière plus simple encore, et, en suivant la marche tracée par l'auteur, on peut obtenir une démonstration non moins simple du théorème de M. Cauchy, et ramener ainsi toute cette théorie à être racontée, pour ainsi dire, dans une promenade, à quelqu'un même qui n'aurait aucune notion de géométrie, ainsi que nous allons le faire voir.

Remarquons d'abord que, si s est le nombre des sommets d'un polygone ouvert, $s+1$ sera le nombre de ses côtés; c'est-à-dire, que *le nombre des côtés d'un polygone ouvert surpasse constamment d'une unité le nombre des sommets de ce polygone.*

Soit présentement un système non interrompu, ou, en d'autres termes, un réseau de polygones contigus les uns aux autres et formant, par leur ensemble, un polygone unique, convexe ou non. Soient F le nombre des figures partielles composant ce polygone total, S le nombre des points qui leur servent de sommets et A le nombre des droites qui leur servent de côtés.

Concevons qu'on enlève un quelconque des polygones extérieurs sans toucher aucunement aux autres; ceux-ci formeront un nouveau réseau. Désignons par F' le nombre des figures qui composent ce dernier, par S' le nombre des points qui lui servent de sommet et par A' le nombre des droites qui lui servent de côtés.

Il est évident que, pour passer du premier réseau au second, on n'aura eu autre chose à faire que de supprimer dans celui-là un certain polygone ouvert, et, qu'en représentant par s le nombre de ses sommets, on aura

$$F' = F - 1,$$

$$S' = S - s ,$$

$$A' = A - s - 1 ;$$

d'où on conclut sur-le-champ

$$F' + S' - A' = F + S - A ;$$

ainsi, en supprimant un des polygones extérieurs, le nombre des polygones, augmenté du nombre des points servant de sommets et diminué du nombre de droites servant de côtés, demeurera constant; il en sera donc de même si l'on enlève un second polygone extérieur, puis un troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait enfin amené le réseau à se réduire à un polygone unique.

Mais, dans ce dernier cas, on aura évidemment

$$F + S - A = 1 ;$$

donc, cette relation aura également lieu quel que puisse être le nombre des polygones qui composeront le réseau, c'est-à-dire que, *dans un réseau de polygones contigus les uns aux autres, le nombre des polygones, augmenté du nombre des sommets, surpasse constamment d'une unité le nombre des droites.* C'est le premier des deux théorèmes de M. Cauchy.

La forme de la démonstration de ce théorème prouve évidemment qu'il est applicable aux polygones plans, curvilignes et mixtilignes, comme aux polygones plans rectilignes, pourvu que l'on admette qu'aucun des premiers n'a moins de trois côtés, et il n'est pas moins évident qu'il serait encore vrai, sous la même restriction, pour un réseau de polygones curvilignes tracés sur une surface courbe quelconque.

Enfin, il sera vrai aussi pour un système de polygones recti-

lignes tel que deux polygones consécutifs pourraient n'être pas situés dans un même plan ; c'est-à-dire , en d'autres termes , pour un polyèdre ouvert ; de sorte qu'en représentant par f le nombre des faces , par s le nombre des sommets et par a le nombre des arêtes d'un tel polyèdre , nous devons avoir

$$f + s - a = 1 ;$$

c'est-à-dire que , *dans tout polyèdre ouvert , le nombre des faces , augmenté du nombre des sommets , surpasse constamment d'une unité le nombre des arêtes.*

Remarquons que la même relation subsisterait encore , lors même qu'on voudrait faire abstraction tant des sommets que des arêtes extérieures du polyèdre ouvert , puisque les uns et les autres étant en même nombre , la valeur de $f - a$ n'en serait aucunement affectée ; ainsi *dans tout polyèdre ouvert , le nombre des faces , augmenté du nombre des arêtes intérieures , surpasse constamment d'une unité le nombre des sommets intérieurs.*

Si l'on enlève une quelconque des faces d'un polyèdre fermé quelconque , il deviendra un polyèdre ouvert dans lequel le nombre des faces sera moindre d'une unité , tandis que le nombre des sommets et celui des arêtes demeurera le même si donc F , S ; A représentent respectivement le nombre des faces , celui des sommets et celui des arêtes du polyèdre fermé , nous devons avoir (1)

$$(F - 1) + S - A = 1 ;$$

d'où

$$F + S = A + 2 ;$$

c'est-à-dire que , *dans tout polyèdre fermé , le nombre des faces , augmenté du nombre des sommets , surpasse constamment de deux unités le nombre des arêtes.* C'est le théorème d'Euler.

Soit présentement un système non interrompu , ou , en d'autres termes ,

un réseau de polyèdres contigus les uns aux autres et formant , par leur ensemble , un polyèdre unique , convexe ou non. Soient P le nombre de ces polyèdres , F le nombre des plans leur servant de *faces* , S le nombre des points leur servant de *sommets* et enfin A le nombre des droites leur servant d'*arêtes*.

Concevons qu'on enlève un quelconque des polyèdres extérieurs , sans toucher aucunement aux autres ; ceux-ci formeront un nouveau réseau. Désignons par P' le nombre des polyèdres de ce dernier réseau , par F' le nombre des plans leur servant de faces , par S' le nombre des points leur servant de sommets et par A' le nombre des droites leur servant d'arêtes.

Il est évident que , pour passer du premier réseau au second , on n'aura autre chose à faire que de supprimer dans celui-là un certain polyèdre ouvert , et qu'en représentant par f le nombre de ses faces , par s le nombre de ses sommets intérieurs et par a le nombre de ses arêtes intérieures , on aura , comme nous l'avons prouvé plus haut ,

$$f+s-a=1 ; \quad (1)$$

mais on aura aussi , d'un autre côté ,

$$P'=P-1 ,$$

$$F'=F-f ,$$

$$S'=S-s ,$$

$$A'=A-a ;$$

d'où on conclura sur-le-champ , en ayant égard à la relation (1) ,

$$F'+S'-A'-P'=F+S-A-P ;$$

ainsi , en supprimant un des polyèdres extérieurs , le nombre des faces , plus le nombre des sommets moins le nombre des arêtes ,

338 POLYGONES ET POLYÈDRES.

moins encore le nombre des polyèdres, demeurera constant; il en sera donc encore de même si l'on enlève un second polyèdre extérieur, puis un troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait enfin amené le réseau à se réduire à un polyèdre unique.

Mais, comme alors, en vertu du théorème d'Euler, on aura

$$F + S - A = 2 ,$$

et comme d'ailleurs on aura $P = 1$, on pourra écrire

$$F + S - A - P = 1 ;$$

donc cette relation ou son équivalente

$$F + S = A + P + 1 ,$$

aura également lieu, quel que soit le nombre des polyèdres dont le réseau sera composé; c'est-à-dire que, *dans un réseau de polyèdres contigus les uns aux autres, le nombre des faces, augmenté du nombre des sommets, surpasse constamment d'une unité le nombre des arêtes augmenté du nombre des polyèdres.* C'est le second théorème de M. Cauchy, que M. Gruner n'avait pas démontré.

En rapprochant ce qui précède des laborieuses recherches d'Euler, sur le même sujet, on se trouve ramené, comme dans tant d'autres cas, à cette réflexion, savoir: qu'il est bien rare qu'une théorie sorte sous sa forme la plus simple des mains de son premier auteur. Nous pensons qu'on sert peut-être plus encore la science en simplifiant, de la sorte, des théories déjà connues, qu'en l'enrichissant de théories nouvelles, et c'est là un sujet auquel on ne saurait s'appliquer avec trop de soin.

On peut voir à la pag. 157 du XV.^m volume du présent recueil, les nombreuses et piquantes conséquences qui résultent de ce théorème.