ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Questions résolues. Solution du problème de statique énoncé à la pag. 283 du XVII.me volume des Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 339-348

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__339_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème de statique énoncé à la pag. 283 *du XVII.me volume des* Annales ;

Par un ABONNÉ. (*)

PROBLÈME. *De quelle manière doit être posé un fil uniformément pesant, d'une longueur donnée, parfaitement flexible et inextensible, sur deux tringles fixes, rectilignes, horizontales et parallèles, d'un diamètre infiniment petit, n'exerçant sur ce fil aucun frottement, pour s'y tenir en équilibre ? Quelle est en outre la moindre longueur de ce fil, qui puisse permettre l'équilibre.*

I. *Considérations préliminaires.* Avant d'attaquer cette question par le calcul, examinons d'abord ce que les notions les plus élémentaires de la statique nous permettent de découvrir sur le nombre et la nature des solutions dont elle peut être susceptible. Cette attention préliminaire nous paraît ici d'autant plus convenable que, généralement parlant, le problème ne peut être résolu algébriquement que par les séries.

La première remarque qui s'offre à l'esprit, c'est que l'équilibre ne pourra subsister qu'autant que le fil, abandonné à lui-même, se trouvera contenu, en totalité, dans un plan vertical perpendiculaire à la direction commune des deux tringles, dont la résis-

(*) M. Timmermans s'est aussi occupé de ce problème.

tance se réduira ainsi à celle de deux points fixes ou de deux anneaux infiniment petits, dans lesquels ce fil se trouverait engagé.

Ces points fixes diviseront la longueur totale du fil en trois parties, dont l'intermédiaire affectera la courbure d'une chaînette uniformément pesante, tandis que les deux extrêmes, pendant verticalement, feront équilibre par leurs poids, aux tensions qui s'exerceront aux deux extrémités de l'autre partie.

Supposons, en premier lieu, que les longueurs des deux parties extrêmes soient, l'une et l'autre, infinies; alors leurs poids et, par suite, les tensions aux deux extrémités de la partie intermédiaire étant également infinis, cette partie sera tendue en ligne droite; elle aura la moindre longueur qu'elle puisse avoir.

Si les longueurs des deux parties extrêmes, sans être infinies, sont néanmoins très-grande par rapport à celle de la partie intermédiaire, tout se passera encore *à peu près* de la même manière. Il arrivera seulement que cette partie intermédiaire affectera une faible courbure.

Si alors on tente de diminuer un peu cette courbure au profit des longueurs des parties extrêmes, comme alors le poids de ces parties ne sera pas augmenté en proportion de l'accroissement de tension aux deux extrémités de l'autre, cette tension deviendra prépondérante, et l'action qu'elle exercera sur les parties extrêmes ramenera bientôt le système dans l'état d'équilibre où il se trouvait d'abord.

Que si, au contraire, on tente d'augmenter un peu la courbure de la partie intermédiaire, aux dépens de celles des parties extrêmes, l'action de celles-ci ne se trouvant pas diminuée en proportion du décroissement de tension aux deux extrémités de l'autre, leur action sur celle-ci deviendra prépondérante et tendra à son tour à ramener le système dans sa situation d'équilibre.

Cet équilibre du système sera donc tel que, dans quelque sens qu'on tente de l'en écarter un peu, il tendra constamment à y revenir ; c'est-à-dire que ce système se trouvera dans une situation d'*équilibre stable.*

Si l'on supposait, au contraire, les longueurs des parties extrêmes nulles, ou du moins très-petites, par rapport à celle de la partie intermédiaire, on conçoit que l'équilibre ne pourrait avoir lieu, et que l'action prépondérante des tensions, aux extrémités de cette partie, tendrait à faire glisser ces parties extrêmes sur les points fixes, et à faire entièrement tomber le fil.

Entre les deux états extrêmes que nous venons de considérer, on en conçoit un où le poids des parties extrêmes n'aura exactement que l'action strictement nécessaire pour contre-balancer la tension aux deux extrémités de la partie intermédiaire, et l'empêcher d'entraîner ces parties extrêmes en les faisant glisser sur les appuis.

Si donc, dans cet état de choses, on tente d'augmenter un peu la longueur de la partie intermédiaire, aux dépens de celles des parties extrêmes, l'action de celles-ci cessant dès lors de lutter efficacement contre les tensions aux extrémités de l'autre, ces tensions deviendront prépondérantes, et le fil sera entraîné de dessus les appuis, comme nous le disions tout-à-l'heure.

Que si, au contraire, on tente de diminuer un peu la longueur de la partie intermédiaire, au profit de celles des deux autres, ce sera l'action de celles-ci qui deviendra à son tour prépondérante, et qui fera retourner le système vers la situation d'équilibre stable que nous avions considéré en premier lieu, et dans laquelle il finira par se fixer.

Voilà donc un autre état d'équilibre dont le système doit tendre constamment à l'écarter davantage, dans quelque sens qu'on l'en écarte un peu ; c'est donc une situation d'*équilibre instable.*

On conçoit, au surplus, que moins le fil aura de longueur, pourvu toutefois qu'il en ait suffisamment pour que l'équilibre puisse être établi, et plus aussi ces deux situations d'équilibre stable et instable devront être voisines l'une de l'autre. Il devra donc y avoir telle longueur de fil pour laquelle ces deux situations d'équilibre se confondront en une seule, et cette longueur sera évidemment la moindre pour laquelle l'équilibre puisse être établi. Cette situation unique sera d'ailleurs telle que, si l'on tente de diminuer un peu la longueur de la partie intermédiaire du fil, au profit de celle des parties extrêmes, le système tendra à revenir dans la situation qu'on l'avait contraint d'abandonner; tandis que si, au contraire, on tente d'allonger cette partie, aux dépens des deux autres, elle tendra à s'allonger davantage encore, jusqu'à ce que le fil échappe entièrement aux appuis. Ce sera donc là une situation d'*équilibre mixte*.

Toutes ces diverses considérations peuvent, au surplus, être littéralement appliquées à une pièce d'étoffe homogène, d'une largeur constante, que l'on voudrait soutenir sur deux bâtons rectilignes, fixés horizontalement dans des directions parallèles. On peut, en effet, considérer cette pièce d'étoffe comme une suite de chaînettes uniformément pesantes, posées les unes à côtés des autres, dans des plans verticaux parallèles.

II. *Equation de la chaînette.* Rapportons une chaînette, uniformémement pesante, à la tangente et à la normale en son point le plus bas, prises respectivement pour axes des x et des y. Soit pris pour unité de poids ce que peserait une portion de cette chaînette égale en étendue à l'unité de longueur; si alors s exprime la longueur de l'arc de courbe compris depuis l'origine jusqu'à un quelconque (x,y) de ses points, cette lettre représentera aussi le poids de cet arc; et si z et v expriment respectivement les tensions qui ont lieu à l'origine et au point (x,y), ces lettres exprimeront aussi les longueurs des portions de la même chaînette dont les poids pourraient faire équilibre à ces mêmes tensions.

Or, on sait, par les premiers principes de la statique, que la tension à chacune des extrémités d'une chaînette, est à son poids comme le sinus de l'angle que fait avec la verticale la tangente à son autre extrémité, est au sinus de l'angle des tangentes aux deux extrémités. On a donc cette double équation

$$\frac{s}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}}=\frac{z}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}}=v\,;$$

d'où on conclut ces deux-ci,

$$z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=s\,, \qquad (1) \qquad\qquad v=z\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\,. \qquad (2)$$

En différentiant la première, il vient

$$z\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,,$$

ou bien

$$z\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}}=\mathrm{d}x\,;$$

d'où, en intégrant,

$$z\,\mathrm{Log.}\left\{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\right\}=x\,;$$

nous n'ajoutons point de constante, parce que x et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ doivent être nuls en même temps.

Cette intégrale revient à

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=e^{\frac{x}{z}}\,,$$

équation qui, rendue rationnelle et résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, donne

$$2\frac{dy}{dx}=e^{\frac{x}{z}}-e^{-\frac{x}{z}}\,; \qquad (3)$$

donc

$$2\frac{ds}{dx}=2\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=e^{\frac{x}{z}}+e^{-\frac{x}{z}}\,; \qquad (4)$$

ce qui donne, en intégrant,

$$2s=z\left(e^{\frac{x}{z}}+e^{-\frac{x}{z}}\right). \qquad (5)$$

Ici encore nous n'ajoutons point de constante, parce que x et s doivent être nuls en même temps.

En substituant dans l'équation (2) la valeur de $\frac{ds}{dx}$, donnée par l'équation (4), elle devient

$$2v=z\left(e^{\frac{x}{z}}+e^{-\frac{x}{z}}\right). \qquad (6)$$

En intégrant ensuite l'équation (3), il vient

$$2(y+k)=z\left(e^{\frac{x}{z}}+e^{-\frac{x}{z}}\right),$$

où k est la constante arbitraire. Remarquant alors que x et y doivent être nuls en même temps, on trouve $k=z$, et, par suite,

$$2(y+z)=z\left(e^{\frac{x}{z}}+e^{-\frac{x}{z}}\right). \qquad (7)$$

Au moyen des équations (5), (6), (7), un point (x, y) étant donné sur le plan des axes, on déterminera quelle longueur s doit avoir la chaînette tendue de l'origine à ce point, pour que sa tangente, au premier de ces deux points, se confonde avec l'axe des x, supposé horizontal, et on déterminera, en outre, ses tensions z et v en ces deux points, c'est-à-dire les longueurs qu'il faudrait prendre sur un fil uniformément pesant de la même nature, pour que leurs poids fissent équilibre à ces mêmes tensions.

Mais, par une combinaison convenable de ces trois équations, on peut les remplacer par d'autres plus simples; et d'abord la comparaison des équations (6) et (7) donne sur-le-champ

$$v=z+y. \qquad (8)$$

En prenant, tour à tour, la demi-somme et la demi-différence des équations (5) et (6), il vient

$$v+s=z.e^{\frac{x}{z}}, \qquad (9)$$

$$v-s=z.e^{-\frac{x}{z}};$$

équations dont la seconde équivaut à la première, pourvu qu'on admette que s change de signe avec x. En les multipliant membre à membre, il viendra

$$v^2-s^2=z^2. \qquad (10)$$

On pourra donc remplacer les équations (5), (6), (7) par les équations (8), (9), (10), dont une seule est transcendante.

Si l'on veut transporter l'origine au point quelconque $(-t,-u)$, auquel cas t et u seront les coordonnées du point le plus bas de la courbe, il ne s'agira que de changer respectivement x et y en $t+x$ et $u+y$, ce qui donnera

$$v=z+u+y\ , \qquad (11)$$

$$v+s=z.e^{\frac{t+x}{z}}\ , \qquad (12)$$

$$v^2-s^2=z^2\ . \qquad (13)$$

III. *Solution du problème.* Soit présentement $2c$ la longueur totale du fil en équilibre sur les deux points fixes (a,b), (a',b') que, pour fixer les idées, nous supposons situés l'un et l'autre du côté positif du point le plus bas (t,u). Alors v, v' étant les longueurs des deux parties extrêmes, pendant verticalement, et s, s' les longueurs de la chaînette comptées depuis le point (t,u) situé sur son prolongement, jusqu'aux points (a,b), (a',b'), la longueur de la partie intermédiaire sera $s-s'$; de sorte qu'on aura

$$v+v'+(s-s')=2c\ . \qquad (14)$$

On aura, en outre, en vertu des équations (11), (12), (13),

$$v=z+u+b\ , \quad (15) \qquad\qquad v'=z+u+b'\ , \quad (18)$$

$$v+s=z.e^{\frac{t+a}{z}}\ , \quad (16) \qquad\qquad v'+s'=z.e^{\frac{t+a'}{z}}\ , \quad (19)$$

$$v^2-s^2=z^2\ ; \quad (17) \qquad\qquad v'^2-s'^2=z^2\ ; \quad (20)$$

équations au moyen desquelles on déterminera les sept inconnues t, u, v, v', s, s', z, lorsque les grandeurs a, a', b, b', c seront données.

Comme les inconnues t et u sont étrangères au problème qui nous occupe, il convient de les éliminer d'abord. Il suffit pour cela de retrancher l'équation (18) de l'équation (15), et de diviser ensuite l'équation (16) par l'équation (19); il vient ainsi

$$v-b=v'-b' \,, \qquad (21)$$

$$\frac{v+s}{v'+s'}=e^{\frac{a-a'}{z}} \,. \qquad (22)$$

de sorte qu'on aura, pour déterminer v, v', s, s', z les cinq équations (14), (17), (20), (21), (22).

L'équation (21) montre que, dans le cas d'équilibre, les parties extrêmes du fil, pendant verticalement, doivent se terminer sur la même droite horizontale (*).

En égalant les valeurs de z^2, données par les équations (17) et (20), on en conclut

$$v^2-s^2=v'^2-s'^2 \,, \qquad (23)$$

équation qui exprime ce théorème : si l'on construit un triangle dont la base soit égale à la longueur de la partie intermédiaire, courbée en chaînette, du fil en équilibre, et dont les deux autres côtés soient égaux en longueur aux parties extrêmes de ce fil, pendant verticalement; la perpendiculaire abaissée du sommet du triangle, sur la direction de cette base, la divisera en deux segmens respectivement égaux aux longueurs des deux segmens de la partie intermédiaire, comptés depuis son point le plus bas.

Pour simplifier le problème, supposons que les deux points fixes soient situés sur la même horizontale, à la distance $2d$ l'un de l'autre; on aura ainsi $b'=b$ et $a-a'=2d$, on en conclura, par l'équation (21),

---

(*) On conclura facilement de là que, quel que puisse être le nombre des points d'appui, et, par suite, le nombre des parties intermédiaires ployées en chaînettes, toujours les parties extrêmes, pendant verticalement, devront, dans le cas d'équilibre, se terminer sur la même horizontale.

$\rho'=\rho$, et par l'équation (22), $s=-s'$; les équations (14), (17), (20) et (22) se réduiront alors à

$$\rho+s=c\,, \qquad (24)$$

$$\rho^2-s^2=(\rho+s)(\rho-s)=c(\rho-s)=z^2\,, \qquad (25)$$

$$\frac{\rho+s}{\rho-s}=e^{\frac{2d}{z}}\,; \qquad (26)$$

mettant dans cette dernière, pour $\rho+s$ et $\rho-s$, leurs valeurs données par les deux précedentes, elle deviendra

$$c^2=z^2.e^{\frac{2d}{z}}\,;$$

d'où, par l'extraction de la racine quarrée,

$$c=z.e^{\frac{d}{z}}\,. \qquad (27)$$

Par le développement en fraction continue, ou par tout autre moyen analogue, on tirera de cette dernière, dans chaque cas particulier, la valeur de z, et on en conclura ensuite celles de ρ et s, au moyen des équations (24) et (25).

Si l'on veut savoir, pour ce cas particulier, quel est le fil le plus court qui puisse résoudre le problème, il faudra égaler à zéro la différentielle de la valeur de c, prise par rapport à z, ce qui donnera

$$0=(z-d).e^{\frac{d}{z}}\,;$$

l'égalité à zéro du second facteur répondant au fil le plus long; nous aurons simplement $z=d$, d'où $c=e.d$; les équations (24) et (25) donneront ensuite $\rho=\frac{e^2+1}{2e}d$, et $s=\frac{e^2-1}{2e}d$.

Lyon, le 18 avril 1828.