ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

LE BARBIER

Dynamique. Solution d'un problème de dynamique

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 359-371
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__359_1>

DYNAMIQUE.

Solution d'un problème de dynamique ;

Par M. Le Barbier.

PROBLÈME. *Une roue circulaire porte, à sa circonférence, un canal annulaire, dont toutes les sections, suivant des plans conduits par l'axe de la roue, sont des cercles égaux, ayant leurs centres sur une circonférence située dans le plan de cette roue et concentrique avec elle.*

La roue est mobile dans l'espace, mais de telle sorte que son centre coïncide constamment avec le sommet d'un cône droit fixe, dont l'axe est vertical; quelle doit tourner uniformément autour de ce cône, avec une vîtesse donnée, de manière à le toucher successivement, suivant toutes ses génératrices, et à n'avoir avec lui qu'un frottement du second genre.

Dans l'intérieur du canal, supporté par la roue, on a introduit une sphère pesante, de même diamètre que ce canal, ayant son centre de gravité à son centre de figure, et à laquelle on a imprimé une vîtesse quelconque; et l'on demande de déterminer les lois du mouvement du centre de cette sphère, en faisant d'ailleurs abstraction de la résistance de l'aire et du frottement, et en supposant d'ailleurs la sphère assez petite pour qu'il soit permis de regarder toute sa masse comme étant réunie à son centre?

Solution. Rien n'étant plus facile que de combiner le mouvement de translation, donné et uniforme, du canal dans l'espace avec le mouvement circulaire varié du centre de la sphère, dans l'intérieur de ce canal supposé fixe, occupons-nous d'abord uniquemment de la recherche des lois de ce dernier mouvement. C'est déjà de la sorte que nous en avons usé récemment (pag. 285), en traitant un problème analogue à celui-ci.

Les données du problème sont ici :

1.° L'angle générateur du cône fixe qu'enveloppe constamment la roue dans sa révolution, angle que nous représenterons par α;

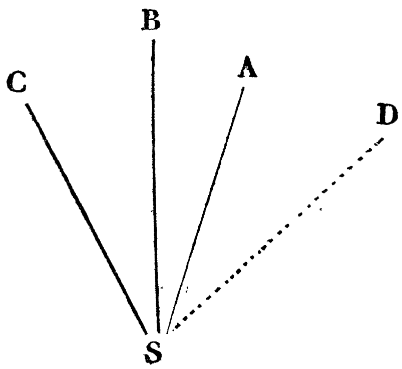
2.° La durée de cette révolution, que nous désignerons par T;

3.° Enfin, la distance constante du centre de la sphère mobile au sommet du cône, centre du mouvement du système; nous la représenterons par r.

En conséquence, le développement du cône sera un angle plan, exprimé par $2\varpi\text{Sin}.\alpha$; c'est cet angle que décrira la ligne de contact, sur le plan de la roue, pendant la durée d'une révolution entière, puisqu'on suppose que le frottement est du second genre seulement; et, puisqu'on suppose que le mouvement de révolution est uniforme, le mouvement angulaire de la ligne de contact sur le plan de la roue, dans le temps t, sera $\frac{2\pi t \,\text{Sin.}\, \alpha}{T}$.

La seule force accélératrice du système est la gravité que nous désignerons, à l'ordinaire, par g. Si, à l'époque t, on la décompose en trois autres forces, la première dirigée suivant le rayon vecteur du centre de la sphère mobile, la seconde perpendiculaire au plan de la roue et la troisième suivant la tangente menée par le centre de cette sphère, au cercle qu'elle tend à décrire ; les deux premières composantes seront détruites par la résistance du canal, tandis que la troisième aura son plein effet. La force accélératrice vraiment efficace, à l'époque t, sera donc seulement le produit de la gravité g par le cosinus tabulaire de l'angle que fera alors la verticale menée par le centre de la sphère mobile avec la tangente menée par le même point au cercle qu'elle tend à décrire. Cherchons donc l'expression de ce cosinus.

Soit S le sommet du cône, centre de la roue, et soient, sur cette roue, SA le rayon qui était en contact avec le cône à l'origine des temps, SB celui qui est en contact avec ce même cône à l'époque t,



et enfin SC le rayon vecteur du centre de la sphère à la même époque. Les rayons SB et SC varieront de situation, sur le plan de la roue, avec le temps t; mais le rayon SA, au contraire; emporté à la vérité dans l'espace, avec cette roue, sera fixe sur elle, et, en conséquence, ce sera à sa direction que nous rapporterons, à chaque instant, celle du rayon vecteur du point mobile.

Supposons, pour fixer les idées, que le mouvement de la roue autour du cône et celui de la sphère dans le canal s'exécutent de manière à faire croître les deux angles ASB et ASC avec le temps t; posons $Ang.\text{ASC}=\theta$, puisque ASB est l'angle décrit par la ligne de contact sur le plan de la roue durant le temps t, nous aurons, comme nous l'avons remarqué ci-dessus, $Ang.\text{ASB}=\frac{2\varpi t\text{Sin}.\alpha}{T}$, d'où $Ang.\text{BSC}=\theta-\frac{2\varpi t\text{Sin}\,\alpha}{T}$; et si nous menons, dans le plan de la roue, le rayon SD, perpendiculaire à SC, nous aurons

$$Cos.\text{BSD}=Sin.\text{BSC}=Sin\left(\theta-\frac{2\varpi t\text{Sin}.\alpha}{T}\right).$$

Considérons présentement l'angle trièdre dont les trois arêtes sont SB, SD et l'axe du cône; cet angle trièdre est rectangle suivant l'arête SB; or, l'axe du cône étant vertical, et le rayon SD étant parallèle à la tangente menée par le centre de la sphère, au cercle qu'elle tend à décrire, il s'ensuit que l'angle plan hypothénusal, de cet angle trièdre, est précisément égal à celui dont nous cherchons le cosinus; or, les deux autres angles plans de cet angle trièdre sont, d'une part, l'angle BSD, et de l'autre, l'angle α, générateur du cône; et, comme d'ailleurs, dans tout angle trièdre rectangle, le cosinus de l'angle plan hypothénusal est égal au produit des cosinus des deux autres, il s'ensuit que le cosinus cherché doit avoir pour expression

$$\text{Cos}.\alpha\text{Sin}.\left(\frac{2\varpi t\text{Sin}.\alpha}{T}\right),$$

et que, conséquemment, la force accélératrice efficace, à l'époque t, sera

$$g\text{Cos.}\alpha\text{Sin.}\left(\theta-\frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right);$$

on aura donc pour l'équation différentielle du mouvement du centre de la sphère, dans le canal supposé immobile,

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2}=g\text{Cos.}\alpha\text{Sin.}\left(\theta-\frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right);$$

équation qui, en posant, pour abréger

$$g=mr\ , \qquad (1)$$

deviendra

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=m\text{Cos.}\alpha\text{Sin.}\left(\theta-\frac{2\varpi t\text{Sin}\,\alpha}{T}\right). \qquad (2)$$

En multipliant les deux membres de cette équation par

$$2\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{2\varpi\text{Sin.}\alpha}{T}\right) \quad \text{ou} \quad 2\frac{d.}{dt}\left(\theta-\frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right),$$

elle deviendra

$$2\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{2\varpi\text{Sin.}\alpha}{T}\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}=2m\text{Cos.}\alpha.\ \frac{d.}{dt}\left(\theta-\frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right)\text{Sin.}\left(\theta-\frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right);$$

ou bien

$$d.\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{2\varpi\text{Sin.}\alpha}{T}\right)^2=-2m\text{Cos.}\alpha.d.\text{Cos.}\left(\theta-\frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right);$$

d'où, en intégrant

$$\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{2\varpi\text{Sin.}\alpha}{T}\right)^2=A-2m\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\left(\theta-\frac{1\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right),$$

A étant la constante arbitraire.

Pour la faire disparaître, admettons qu'à l'origine des temps l'angle θ soit égal à β, et qu'alors le centre de la sphère mobile ait reçu, dans le sens du mouvement, une impulsion capable de lui faire faire une révolution entière dans le canal, durant le temps τ; on devra alors avoir, en même temps,

$$t=0\ , \quad \theta=\beta\ , \quad \frac{d\theta}{dt}=\frac{2\varpi}{\tau}\ ;$$

ce qui donne, en substituant,

$$4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin}.\alpha}{T}\right)^2=A-2m\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\beta\ ,$$

d'où, en retranchant de l'équation précédente

$$\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{2\varpi\text{Sin}.\alpha}{T}\right)^2$$

$$=4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin}\,\alpha}{T}\right)^2+2m\text{Cos}.\alpha\left\{\text{Cos}.\beta-\text{Cos}.\left(\theta-\frac{2\varpi t\text{Sin}.\alpha}{T}\right)\right\}. \quad (3)$$

Posons, pour abréger,

$$\theta-\frac{2\varpi t\text{Sin}.\alpha}{T}=\omega \qquad (4)$$

d'où

$$\frac{d\theta}{dt}-\frac{2\varpi\text{Sin}\,\alpha}{T}=\frac{d\omega}{dt}\ ;$$

il viendra, en substituant dans (3)

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2=4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin}.\alpha}{T}\right)^2+2m\text{Cos}.\alpha\text{Cos}\,\beta-2m\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\omega\ ;$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{dt}=\sqrt{4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin}\,\alpha}{T}\right)^2+2m\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta-2m\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\omega}\,. \quad (5)$$

Posons encore

$$x=\sqrt{4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin.}\alpha}{T}\right)^2+2m\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta-2m\text{Cos.}\alpha\text{Cos}\,\omega}\,; \quad (6)$$

d'où, en différentiant,

$$dx=\frac{m\text{Cos.}\alpha.d\omega.\text{Sin.}\omega}{\sqrt{4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin}\,\alpha}{T}\right)^2+2m\text{Cos.}\alpha\text{Cos}\,\beta-2m\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\omega}}\,;$$

multipliant cette équation par l'équation (5), on en conclura

$$\frac{dx}{dt}=m\text{Cos.}\alpha\text{Sin.}\omega\,; \quad (7)$$

mais de l'équation (6) on tire, en quarrant et transposant,

$$\text{Cos.}\omega=\frac{4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin.}\alpha}{T}\right)^2+2m\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta-x^2}{2m\text{Cos.}\alpha}\,,$$

d'où

$$\text{Sin.}\omega=\frac{\sqrt{4m^2\text{Cos.}^2\alpha-\left\{4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin.}\alpha}{T}\right)^2+2m\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta-x^2\right\}^2}}{2m\text{Cos.}\alpha}\,,$$

remarquant alors que la quantité sous le radical se décompose en deux facteurs, et posant, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned} G&=2m(1+\text{Cos.}\beta)\text{Cos.}\alpha+4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin.}\alpha}{T}\right)^2\,,\\ H&=2m(1-\text{Cos.}\beta)\text{Cos.}\alpha-4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin.}\alpha}{T}\right)^2\,,\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

on aura

$$\text{Sin.}\omega = \frac{\sqrt{(G-x^2)(H+x^2)}}{2m\text{Cos.}\alpha}\;; \qquad (9)$$

ce qui donnera, en substituant dans (7),

$$\text{d}t = \frac{2\text{d}x}{\sqrt{(G-x^2)(H+x^2)}}\;; \qquad (10)$$

telle est donc l'équation qu'il faudrait intégrer pour obtenir la solution la plus générale du problème.

Afin de pouvoir poursuivre l'intégration, sans trop particulariser la solution, posons $H=0$, c'est-à-dire (1) et (8),

$$2\varpi g^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\text{Sin.}\alpha}{T}\right)^2 = r(1-\text{Cos.}\beta)\text{Cos}\,\alpha\;; \qquad (11)$$

ce qui peut arriver de bien de manières différentes, puisque nous n'établissons ainsi qu'une relation unique entre les cinq données arbitraires et indépendantes r, α, β, τ, T; il en résultera $G=4m\text{Cos.}\alpha$; de sorte que l'équation (10) deviendra

$$\text{d}t = \frac{2\text{d}x}{x\sqrt{4m\text{Cos.}\alpha - x^2}}\;,$$

dont l'intégrale sera

$$t+B = \frac{1}{2\sqrt{m\text{Cos.}\alpha}}\,\text{Log.}\,\frac{\sqrt{4m\text{Cos.}\alpha-x^2}-2\sqrt{m\text{Cos.}\alpha}}{\sqrt{4m\text{Cos.}\alpha-x^2}+2\sqrt{m\text{Cos.}\alpha}}\;; \qquad (12)$$

B étant une nouvelle constante arbitraire.

Dans l'hypothèse actuelle de $H=0$, l'équation (6) donne en quarrant

$$x^2 = 2m\text{Cos.}\alpha.(1-\text{Cos.}\omega)\;,$$

d'où

$$\sqrt{4m\text{Cos.}\alpha - x^2} = \sqrt{2m\text{Cos.}\alpha(1+\text{Cos.}\omega)} = 2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\omega\sqrt{m\text{Cos.}\alpha} ;$$

en conséquence l'équation (12) deviendra

$$2(1+B)\sqrt{m\text{Cos.}\alpha} = \text{Log.}\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}\omega - 1}{\text{Cos.}\frac{1}{2}\omega + 1} = \text{Log.}\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right) - 1}{\text{Cos.}\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right) + 1},$$

Pour faire disparaître la constante B rappelons-nous qu'on doit avoir, en même temps, $t=0$ et $\theta=\beta$, ce qui donne, en substituant,

$$2B\sqrt{m\text{Cos.}\alpha} = \text{Log.}\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}\beta - 1}{\text{Cos.}\frac{1}{2}\beta + 1} ;$$

retranchant cette équation de la précédente, on aura

$$2t\sqrt{m\text{Cos.}\alpha} = \text{Log.}\left\{\frac{1+\text{Cos.}\frac{1}{2}\beta}{1-\text{Cos.}\frac{1}{2}\beta} \cdot \frac{1-\text{Cos.}\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right)}{1+\text{Cos.}\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right)}\right\} ;$$

ou bien

$$2t\sqrt{m\text{Cos.}\alpha} = \text{Log.}\frac{\text{Tang}^2\frac{1}{4}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right)}{\text{Tang}^2\frac{1}{4}\beta} = 2\text{Log.}\frac{\text{Tang.}\frac{1}{4}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right)}{\text{Tang.}\frac{1}{4}\beta} ;$$

c'est-à-dire,

$$t\sqrt{m\text{Cos.}\alpha} = \text{Log.}\frac{\text{Tang.}\frac{1}{4}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right)}{\text{Tang}\frac{1}{4}\beta} ;$$

ce qui donne

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{4}\left(\theta - \frac{2\varpi t\text{Sin.}\alpha}{T}\right) = e^{t\sqrt{m\text{Cos.}\alpha}}.\text{Tang.}\tfrac{1}{4}\beta ,$$

et, par suite,

$$\theta=\frac{2\varpi t\,\text{Sin.}\alpha}{T}+4\,\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=e^{t\sqrt{m\text{Cos.}\alpha}}.\text{Tang.}\tfrac{1}{4}\beta\right). \quad (13)$$

Au moyen de cette équation on pourra, pour chaque instant, déterminer la situation du rayon vecteur du centre de la sphère mobile, sur le plan de la roue ; mais on ne pourra, que par tâtonnement, résoudre la question inverse, c'est-à-dire déterminer à quel instant ce rayon vecteur aura une situation donnée.

Cherchons présentement l'équation polaire de la surface conique décrite dans l'espace par le rayon vecteur du centre de la sphère mobile. Rapportons ce rayon vecteur au plan horizontal conduit par le sommet du cône et à la projection sur ce plan de la génératrice, suivant laquelle ce cône est touché par le plan de la roue à l'origine des temps. Soient φ l'angle que fait le rayon vecteur avec ce plan à l'époque t, et ψ l'angle que fait sa projection, sur ce plan, avec la projection de la génératrice dont il vient d'être question.

Considérons l'angle trièdre dont les arêtes sont l'axe du cône, le rayon vecteur dont il s'agit et la ligne de contact de ce cône avec le plan de la roue à l'époque t; cet angle trièdre est rectangle suivant cette dernière droite ; son angle plan hypothénusal est évidemment le complément de l'angle φ, et ses deux autres angles plans sont α et $\theta-\frac{2\varpi t\,\text{Sin.}\alpha}{\text{T}}$; d'où il suit, en vertu du théorème rappelé ci-dessus, qu'on doit avoir

$$\text{Sin.}\varphi=\text{Cos.}\alpha\,\text{Cos.}\left(\theta-\frac{2\varpi t\,\text{Sin.}\alpha}{T}\right). \quad (14)$$

Quant à l'angle ψ, il est manifeste qu'il est la mesure de l'angle dièdre compris entre deux plans verticaux conduits par l'axe du cône, l'un passant par le rayon vecteur mobile et l'autre par la génératrice suivant laquelle le cône était touché par la roue à l'origine des temps. Cet angle est partagé en deux autres par le plan vertical qui passe par la ligne de contact qui répond à l'époque t ; l'un de ces deux-ci est évidemment $\frac{2\varpi t}{T}$, et quant à l'autre, c'est un des angles dièdres obliques de notre angle trièdre rectangle, en le représentant par ξ, on aura

$$\mathrm{Cot.}\varphi\mathrm{Cos.}\xi=\mathrm{Tang.}\alpha\ ,$$

d'où

$$\xi=\mathrm{Arc.}(\mathrm{Cos.}=\mathrm{Tang.}\alpha\mathrm{Tang.}\varphi)\ ,$$

et conséquemment

$$\psi=\frac{2\varpi t}{T}+\mathrm{Arc.}(\mathrm{Cos.}=\mathrm{Tang}\,\alpha\mathrm{Tang.}\varphi)\ ; \qquad (15)$$

en joignant à ces équations l'équation (3), c'est-à-dire

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}-\frac{2\varpi\mathrm{Sin.}\alpha}{T}\right)^2$$

$$=4\varpi^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\mathrm{Sin.}\alpha}{T}\right)^2+2m\mathrm{Cos.}\alpha\left\{\mathrm{Cos}\,\beta-\mathrm{Cos.}\left(\theta-\frac{2\varpi t\mathrm{Sin.}\alpha}{T}\right)\right\},\ (3)$$

et éliminant donc t et θ entre elle, l'équation résultante en φ et ψ sera l'équation polaire cherchée de la surface conique décrite par le rayon vecteur de la sphère mobile.

En raisonnant uniquement dans l'hypothèse $H=0$, déjà admise ci-dessus, l'équation (13) donne

$$\theta-\frac{2\varpi t\mathrm{Sin.}\alpha}{T}=4\mathrm{Arc.}\left\{\mathrm{Tang.}=e^{t\sqrt{m\mathrm{Cos.}\alpha}}.\mathrm{Tang.}\tfrac{1}{4}\beta\right\}\ ;$$

mais l'équation (14) donne

$$\theta-\frac{2\varpi t\mathrm{Sin.}\alpha}{T}=\mathrm{Arc.}\left(\mathrm{Cos.}=\frac{\mathrm{Sin.}\varphi}{\mathrm{Cos.}\alpha}\right)\ ;$$

égalant donc ces deux valeurs, afin d'éliminer θ, on aura

$$\text{Arc.}\left(\text{Cos.}=\frac{\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\alpha}\right)=4\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=e^{t\sqrt{m\text{Cos.}\alpha}}.\text{Tang.}\tfrac{1}{4}\beta\right);$$

d'un autre côté, l'équation (15) donne

$$t=\frac{T}{2\varpi}\{\psi-\text{Arc}(\text{Cos.}=\text{Tang}\,\alpha\text{Tang.}\varphi)\};$$

substituant donc cette valeur de t dans la précédente, on obtiendra, pour l'équation polaire de la surface conique décrite par le rayon vecteur du centre de la sphère mobile,

$$\text{Arc}\left(\text{Cos.}=\frac{\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\alpha}\right)=4\text{Arc}\left\{\text{Tang.}=e^{\frac{T\sqrt{m\text{Cos}\,\alpha}}{2\varpi}[\psi-\text{Arc}(\text{Cos.}=\text{Tang.}\alpha\text{Tang.}\varphi)]}\text{Tang.}\tfrac{1}{4}\beta\right\}.$$

Si l'on veut avoir l'équation de cette même surface conique en coordonnées rectangulaires, en prenant pour axe des z, l'axe même du cône, et pour axe des x, la projection sur le plan horizontal conduit par son sommet de la génératrice suivant laquelle il est touché par le plan de la roue à l'origine des temps; on remarquera que l'on a ainsi

$$\text{Sin}\,\varphi=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\qquad \text{Tang}\,\varphi=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\psi=\text{Arc}\left(\text{Tang}=\frac{y}{x}\right);$$

d'où, en substituant

$$\text{Arc}\left(\text{Cos.}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\text{Cos.}\alpha}\right)$$

$$=4\text{Arc}\left\{\text{Tang.}=e^{\frac{T\sqrt{m\text{Cos}\,\alpha}}{2\varpi}\left[\text{Arc}\left(\text{Tang}=\frac{y}{x}\right)-\text{Arc}\left(\text{Cos.}=\frac{z\text{Tang.}\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right]}.\text{Tang.}\tfrac{1}{4}\beta\right\}.$$

Si l'on veut enfin avoir la courbe à double courbure décrite dans l'espace par le centre de la sphère mobile, cette courbe sera donnée par cette dernière équation combinée avec l'équation

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

de la sphère sur laquelle ce point est constamment situé.

On voit, par ce qui précède, que des problèmes de dynamique, fort simples en apparence, peuvent souvent conduire à des résultats d'une complication inattendue.