
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

Géométrie élémentaire. Démonstration de quelques théorème

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 374-378

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__374_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1828-1829, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration de quelques théorèmes ;

Par M. P. R.



UN article inséré dans la *Correspondance* de M. Quetelet (tom. IV, pag. 205) nous a fait naître l'idée d'un petit supplément à l'article de la pag. 113 du XVIII.^{me} volume du présent recueil. Le voici :

THÉORÈME I. Si , par un point pris arbitrairement dans l'in-

térieur d'un triangle, on mène des parallèles à ses trois côtés, ces droites diviseront ce triangle en six parties, dont trois seront des triangles tels que l'aire du triangle proposé sera égale au carré de la somme des racines carrées des aires de ces trois là.

Démonstration. Soit Δ le triangle proposé; soient T, T', T'' les trois triangles intérieurs et P, P', P'' les trois parties qui sont des parallélogrammes respectivement opposés; on aura

$$\Delta = T + T' + T'' + P + P' + P'' ;$$

mais on a (tom. XVIII, pag. 114)

$$P = 2\sqrt{T'T''} , \quad P' = 2\sqrt{T'T} , \quad P'' = 2\sqrt{T'T'} ;$$

donc

$$\Delta = T + T' + T'' + 2\sqrt{T'T''} + 2\sqrt{T'T} + 2\sqrt{T'T'} ,$$

c'est-à-dire ,

$$\Delta = (\sqrt{T} + \sqrt{T'} + \sqrt{T''})^2 ,$$

comme nous l'avions annoncé.

THÉORÈME II. Si, par un point pris arbitrairement dans l'intérieur d'un tétraèdre, on conduit des plans parallèles à ses quatre faces, ces plans diviseront le tétraèdre en quatorze parties, dont quatre seront des tétraèdres tels que le volume du tétraèdre proposé sera égal au cube de la somme des racines cubiques des volumes de ceux-là.

Démonstration. Soit Δ le tétraèdre proposé; soient $T, T', T'' T'''$ les quatre tétraèdres intérieurs; les dix autres parties seront, savoir: quatre parallépipèdes P, P', P'', P''' , respectivement opposés, et six troncs de prismes quadrangulaires ayant une arête latérale nulle, et que nous désignerons par $(pp'), (pp''), (p'p'''), (p''p'''), (pp'''), (pp''')$, suivant les parallépipèdes entre lesquels ils se trouveront situés.

Cela posé, on aura

$$\Delta = T + T' + T'' + T''' + P + P' + P'' + P''' \\ + (pp') + (pp'') + (p'p'') + (p''p''') + (p'p''') + (pp''') ,$$

mais on a trouvé (*Annales*, tom. XVIII, pag. 122)

$$P = 6\sqrt[3]{T'T''T'''} , \quad P' = 6\sqrt[3]{T'T''T'''} , \quad P'' = 6\sqrt[3]{T'T''T'''} , \quad P''' = 6\sqrt[3]{T'T''T'''} .$$

$$(pp') = 3\sqrt[3]{T'^2T''} + 3\sqrt[3]{T''T''^2} , \quad (p''p''') = 3\sqrt[3]{T'^2T''} + 3\sqrt[3]{T''T''^2} ,$$

$$(pp'') = 3\sqrt[3]{T'^2T''} + 3\sqrt[3]{T''T''^2} , \quad (p'p''') = 3\sqrt[3]{T'^2T''} + 3\sqrt[3]{T''T''^2} ,$$

$$(p'p'') = 3\sqrt[3]{T'^2T''} + 3\sqrt[3]{T''T''^2} , \quad (pp''') = 3\sqrt[3]{T'^2T''} + 3\sqrt[3]{T''T''^2} ,$$

donc

$$\Delta = T + T' + T'' + T''' + 3\sqrt[3]{T'^2T''} + 3\sqrt[3]{T''T''^2} + 3\sqrt[3]{T'^2T''} + 3\sqrt[3]{T''T''^2} \\ + 3\sqrt[3]{T'^2T''} + 3\sqrt[3]{T''T''^2} + 3\sqrt[3]{T'^2T''} + 3\sqrt[3]{T''T''^2} + 3\sqrt[3]{T'^2T''} \\ + 3\sqrt[3]{T''T''^2} + 3\sqrt[3]{T''^2T'''} + 3\sqrt[3]{T''T''^2} + 6\sqrt[3]{T'T''T'''} \\ + 6\sqrt[3]{T'T''T'''} + 6\sqrt[3]{T'T''T'''} + 6\sqrt[3]{T'T''T'''} ;$$

c'est-à-dire ,

$$\Delta = (\sqrt[3]{T} + \sqrt[3]{T'} + \sqrt[3]{T''} + \sqrt[3]{T'''})^3 ,$$

comme nous l'avions annoncé.

Ces deux théorèmes, dont le premier avait déjà été remarqué en

l'endroit cité, par M. Lobatto, peuvent au surplus être directement établis, d'une manière fort simple, par les considérations suivantes :

I. Les trois triangles T, T', T'' sont semblables au triangle Δ , et chaque côté de ce dernier est évidemment la somme de ses homologues dans les trois autres ; or, les côtés homologues des triangles semblables sont proportionnels aux racines quarrées de leurs aires ; donc on doit avoir aussi

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{T} + \sqrt{T'} + \sqrt{T''},$$

et par suite

$$\Delta = (\sqrt{T} + \sqrt{T'} + \sqrt{T''})^2.$$

II. Les quatre tétraèdres T, T', T'', T''' sont semblables au tétraèdre Δ , et chaque arête de ce dernier est évidemment la somme de ses homologues dans les trois autres ; or, les arêtes homologues des tétraèdres semblables sont proportionnelles aux racines cubiques de leurs volumes ; donc on doit avoir aussi

$$\sqrt[3]{\Delta} = \sqrt[3]{T} + \sqrt[3]{T'} + \sqrt[3]{T''} + \sqrt[3]{T'''},$$

et par suite

$$\Delta = (\sqrt[3]{T} + \sqrt[3]{T'} + \sqrt[3]{T''} + \sqrt[3]{T'''})^3 :$$

A l'aide de ces considérations on reconnaîtra immédiatement la vérité des deux théorèmes que voici, et dont le premier est celui dont on s'occupe spécialement dans l'endroit cité de la correspondance. Il est surprenant qu'aucun des géomètres qui l'ont traité, n'ait songé à le ramener à des considérations aussi simples.

THÉORÈME III. Si, sur l'un des côtés d'un triangle, on prend arbitrairement n points, et que, par chacun d'eux, on mène des parallèles à ses deux autres côtés, ces parallèles diviseront

le triangle en $\frac{n(n+1)}{2}$ parallélogrammes, et en $n+1$ triangles, tels que l'aire du triangle proposé sera égale au carré de la somme des racines quarrées des aires de ceux-là.

THÉORÈME IV. Si, sur l'une des arêtes d'un tétraèdre, on prend arbitrairement n points, et que, par chacun d'eux, on conduise des plans parallèles aux deux faces qui déterminent l'arête opposée, ces plans diviseront le tétraèdre en $\frac{n(n+1)}{2}$, troncs de pyramides quadrangulaires, et en $n+1$ tétraèdres tels que le volume du tétraèdre proposé sera égal au cube de la somme des racines cubiques des volumes de ceux-là.
