ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

J. STEINER

Géométrie élémentaire. Recherche des relations entre les rayons des cercles qui touchent trois droites données sur un plan et entre les rayons des sphères qui touchent quatre plans donnés dans l'espace

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 85-96
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__85_1>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Recherche des relations entre les rayons des cercles qui touchent trois droites données sur un plan et entre les rayons des sphères qui touchent quatre plans donnés dans l'espace ;

Par M. J. STEINER.

I. SOIENT a, b, c les trois côtés d'un triangle ; ces côtés, considérés comme des droites indéfinies, divisent le plan du triangle en *sept* régions, dont une seule finie qui est le triangle lui-même. Trois des six autres sont terminées chacune par un côté du triangle et les prolongemens des deux autres au-delà des extrémités de celui là. Quant aux trois dernières ce sont des angles respectivement opposés à ceux du triangle.

Comme trois conditions sont nécessaires pour déterminer un cercle, ce n'est que dans les quatre premières régions que l'on peut se proposer d'inscrire des cercles. L'un de ces cercles sera intérieur au triangle ; c'est proprement le cercle *inscrit*, dont nous désignerons le rayon par r; les trois autres seront ce que M. Lhuilier a appelé les cercles *ex-inscrits*; nous désignerons respectivement leurs rayons par α, β, γ, suivant les côtés du triangle sur lesquels ils s'appuyeront. On démontre aisément que ces quatre cercles sont touchés à la fois par celui que l'on fait passer par les milieux des côtés du triangle.

Soit T l'aire du triangle; en considérant les triangles qui ayant pour bases les trois côtés a, b, c du triangle donné et pour sommets les centres des quatre cercles, on a

$$\left.\begin{aligned}2T&=r(a+b+c)\ ,\\ 2T&=\alpha(b+c-a)\ ,\\ 2T&=\beta(c+a-b)\ ,\\ 2T&=\gamma(a+b-c)\ .\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

En prenant la somme des produits respectifs de ces équations par $-\alpha\beta\gamma$, $+\beta\gamma r$, $+\gamma\alpha r$, $+\alpha\beta r$, il vient, en divisant $2T$,

$$\alpha\beta\gamma=r(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)\ ,$$

ou bien

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\ ;\qquad(2)$$

c'est-à-dire, *l'inverse du rayon du cercle inscrit à un triangle est égal à la somme des inverses des rayons des trois cercles ex-inscrits au même triangle* (*).

Ou, en d'autres termes, *le parallélipipède rectangle, construit sur les rayons des trois cercles ex-inscrits, est équivalent à la somme des trois parallélipipèdes rectangles construits sur ces mêmes rayons pris deux à deux et sur le rayon du cercle inscrit.*

Au moyen de la relation (2) le rayon de chacun des quatre cercles se trouve déterminé par les rayons des trois autres.

Si le triangle est équilatéral, on a

$$\alpha=\beta=\gamma=3r=h\ ,$$

h étant la hauteur du triangle.

II. En observant que

$$16T^2=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\ ;$$

le produit des équations (1) donne, en réduisant

$$T^2=\alpha\beta\gamma r\ , \qquad (3)$$

d'où

$$T=\sqrt{\alpha\beta\gamma r}\ ;$$

c'est-à-dire, *l'aire d'un triangle est égal à la racine carrée du du produit des rayons des quatre cercles qui touchent à la fois ses trois côtés.* Théorème publié pour la première fois par Mahieu, et

(*) Il y a plusieurs mois que ce théorème nous a été adressé, avec plusieurs autres, par M. Bobillier, dans une note que le défaut d'espace nous a empêché jusqu'ici de publier.

J. D. G.

postérieurement par M. Lhuilier. (*Annales*, tom. I, pag. 150) (*).

Pour le triangle sphérique, on aurait

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}T=\frac{\sqrt{\text{Tang.}\alpha\text{Tang.}\beta\text{Tang.}\gamma\text{Tang,}r}}{2\text{Sin.}\frac{1}{2}a.\text{Sin.}\frac{1}{2}b.\text{Sin.}\frac{1}{2}c}$$

Si de l'équation (3) on élimine tour à tour les quatre rayons, au moyen de la relation (2), on trouvera

$$T^2=\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}=r^2.\frac{\beta^2\gamma^2}{\beta\gamma-r(\beta+\gamma)}=r^2.\frac{\gamma^2\alpha^2}{\gamma\alpha-(\gamma+\alpha)}=r.^2\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha\beta-r(\alpha+\beta)}. \quad (4)$$

Des équations (1) on tire (3)

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{\alpha-r}{\alpha r}.T=(\alpha-r)\sqrt{\frac{\beta\gamma}{\alpha r}}\,,\\ b&=\frac{\beta-r}{\beta r}.T=(\beta-r)\sqrt{\frac{\gamma\alpha}{\beta r}}\,,\\ c&=\frac{\gamma-r}{\gamma r}.T=(\gamma-r)\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma r}}\,;\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

d'où

$$\frac{a\alpha}{\alpha-r}=\frac{b\beta}{\beta-r}=\frac{c\gamma}{\gamma-r}=\frac{T}{r}\,; \qquad (6)$$

et par suite (3)

(*) Ce théorème fait aussi partie de la note de M. Bobillier.
J. D. G.

$$abc=\frac{(\alpha-r)(\beta-\gamma)(\gamma-r)}{r^2}.T\,. \qquad (7)$$

Soit R le rayon du cercle circonscrit ; on sait que

$$R=\frac{abc}{4T}\;;$$

donc (7)

$$R=\frac{(\alpha-r)(\beta-r)(\gamma-r)}{4r^2}\,, \qquad (8)$$

En éliminant r de cette valeur, au moyen de la relation (2), on trouvera

$$R=\frac{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}{4(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)}\ (*)\,. \qquad (9)$$

(*) D'après les équations (5) on peut écrire

$$abc=T^3\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\gamma}\right)$$

ou bien, en développant et ordonnant,

$$abc=T^3\left\{\frac{1}{r^3}-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\frac{1}{r^2}+\left(\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{1}{\alpha\beta}\right)\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\right\}.$$

Au moyen de la relation (2), les deux premiers termes de ce développement disparaissent, et l'on a simplement

Si, de la même valeur, on élimine successivement α, β, γ, au moyen de la même relation, on trouvera

$$R=\frac{(\beta-\gamma)(\gamma-r)(\beta+\gamma)}{4(\beta\gamma-\beta r-\gamma r)}=\frac{(\gamma-r)(\alpha-r)(\gamma+\alpha)}{4(\gamma\alpha-\gamma r-\alpha r)}=\frac{(\alpha-r)(\beta-r)(\alpha+\beta)}{4(\alpha\beta-\alpha r-\beta r)}. \quad (10)$$

III. Si le triangle est supposé rectangle, en désignant par c l'hypothénuse, on aura $2T=ab$, au moyen de quoi les équations (1) deviendront

$$\left.\begin{aligned} \alpha&=\frac{ab}{b+c-a}\,, \\ \beta&=\frac{ab}{c+a-b}\,, \\ \gamma&=\frac{ab}{a+b-c}\,; \\ r&=\frac{ab}{a+b+c}\,. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$$abc=T\left(\frac{T^2}{\beta\gamma r}+\frac{T^2}{\gamma\alpha r}+\frac{T^2}{\alpha\beta r}-\frac{T^2}{\alpha\beta\gamma}\right);$$

ou bien (3)

$$abc=T(\alpha+\beta+\gamma-r)\,;$$

d'où enfin

$$R=\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-r)\,;$$

c'est-à-dire, *le rayon du cercle circonscrit à un triangle est le quart de l'excès de la somme des rayons des trois cercles ex-inscrits à ce triangle sur le rayon du cercle inscrit.* Cet élégant théorème appartient à M. Bobilier.

J. D. G.

En divisant chacune des trois premières par la dernière, il viendra, en chassant les dénominateurs,

$$r(a+b+c)=\alpha(b+c-a)=\beta(c+a-b)=\gamma(a+b-c)\ ,$$

d'où on tirera aisément

$$\frac{\beta(\alpha-r)}{a}=\frac{\alpha(\beta-r)}{b}=\frac{r(\alpha+\beta)}{c}\ ; \qquad (12)$$

Ainsi (11), si les trois côtés du triangle rectangle sont commensurables, les rayons des quatre cercles le seront aussi, et réciproquement (12).

Si, par exemple, il s'agit du triangle de Pythagore, pour lequel on a $a=3$, $b=4$, $c=5$, on aura

$$\alpha=2\ ,\quad \beta=3\ ,\quad \gamma=6\ ,\quad r=1\ .$$

L'équation $a^2+b^2=c^2$ donne $2ab=(a+b)^2-c^2$ ou bien

$$2ab=(a+b+c)(a+b-c)\ ;$$

mais les deux dernières équations (11) donnent

$$\gamma r=\frac{a^2b^2}{(a+b+c)(a+b-c)}\ ;$$

donc

$$\gamma r = \frac{ab}{2} = T;$$

équation qui, comparée à l'équation (3), donne

$$\alpha\beta = \gamma r = T; \qquad (13)$$

c'est-à-dire, *dans tout triangle rectangle, le rectangle des rayons des cercles ex-inscrits, qui répondent aux deux côtés de l'angle droit, est équivalent au rectangle des rayons du cercle inscrit et du cercle ex-inscrit qui répond à l'hypothénuse, et l'un et l'autre sont équivalens à l'aire du triangle.*

IV. Soient a, b, c, d les quatre faces d'un tétraèdre dans leur ordre de grandeur, de la plus grande à la plus petite ; ces faces, considérées comme des plans indéfinis, diviseront l'espace en *quinze* régions, dont *une* seule finie qui sera le tétraèdre lui-même. *Quatre* des quatorze restantes seront terminées chacune par une des faces du tétraèdre et par les prolongemens des plans des trois autres au-delà de celle-là. Il y en aura *six* dont chacune sera terminée par les prolongemens des plans des quatre faces au-delà d'une même arête. Enfin, les quatre dernières seront des angles trièdres opposés à ceux du tétraèdre.

Comme quatre conditions sont nécessaires pour déterminer une sphère, ce n'est que dans les onze premières régions qu'on peut se proposer d'inscrire des sphères. Mais il est aisé voir qu'il ne saurait y en exister à la fois dans les six régions sur les arêtes, opposées deux à deux, et que l'existence d'une sphère, dans l'une d'elles, entraîne l'impossibilité d'en inscrire une dans la région qui lui est opposée.

Il ne saurait donc y avoir plus de huit sphères, une inscrite et sept ex-inscrites qui touchent à la fois les quatre faces d'un tétraèdre, considérées comme des plans indéfinis; et ces dernières se divisent en deux classes, savoir : quatre sphères ex-inscrites aux faces, et les trois autres ex-inscrites aux arêtes.

Soit r le rayon de la sphère inscrite ; soient α, β, γ, δ les rayons des quatre sphères respectivement ex-inscrites sur les faces a, b, c, d ; soient α', β', γ' les rayons des sphères ex-inscrites respectivement sur les arêtes ad ou bc, bd ou ca, cd ou ab ; soit enfin T le volume du tétraèdre.

En considérant les tétraèdres ayant leur sommet commun aux centres de ces différentes sphères et pour bases les faces du tétraèdre T, on trouvera aisément

$$3T=r(a+b+c+d)\ , \qquad (1)$$

$$3T=\alpha(b+c+d-a)\ , \qquad (2)$$

$$3T=\beta(c+d+a-b)\ , \qquad (3)$$

$$3T=\gamma(d+a+b-c)\ , \qquad (4)$$

$$3T=\delta(a+b+c-d)\ , \qquad (5)$$

$$3T=\pm\alpha'(b+c-a-d)\ , \qquad (6)$$

$$3T=\pm\beta'(c+a-b-d)\ , \qquad (7)$$

$$3T=\pm\gamma'(a+b-c-d)\ ; \qquad (8)$$

les signes des seconds membres des trois dernières équations devant être pris de manière que ces seconds membres soient positifs.

Des équations (2, 3, 4, 5) on tire aisément

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{3T}{4}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\alpha}\right), \\ b&=\frac{3T}{4}\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right), \\ c&=\frac{3T}{4}\left(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right), \\ d&=\frac{3T}{4}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}\right). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1) il viendra

$$\frac{2}{r}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}\;; \qquad (10)$$

c'est-à-dire, *la somme des inverses des rayons des sphères ex-inscrites sur les faces d'un tétraèdre, est double de l'inverse du rayon de la sphère qui lui est inscrite.*

Les mêmes valeurs (9) substituées dans les équations (6, 7, 8) donnent

$$\left.\begin{array}{l}\pm\dfrac{2}{\alpha'}=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\delta}-\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\gamma}\,, \\[2ex] \pm\dfrac{2}{\beta'}=\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\delta}-\dfrac{1}{\gamma}-\dfrac{1}{\alpha}\,, \\[2ex] \pm\dfrac{2}{\gamma'}=\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\delta}-\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}\,; \end{array}\right\}\quad(11)$$

c'est-à-dire, *la somme des inverses des rayons des sphères ex-inscrites sur deux des faces d'un tétraèdre, moins la somme des inverses des rayons des sphères ex-inscrites sur ses deux autres faces, est double de l'inverse du rayon de la sphère ex-inscrite sur l'arête des deux premières ou sur l'arête des deux dernières faces.*

On voit donc que les rayons de nos huit sphères sont liés les uns aux autres par quatre relations au moyen desquelles quatre d'entre eux sont déterminés par les quatre autres.

En ajoutant et retranchant tour à tour chacune des équations (11) à l'équation (10) on aura

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\delta}=\dfrac{1}{r}\pm\dfrac{1}{\alpha'}\,, \\[2ex] \dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\delta}=\dfrac{1}{r}\pm\dfrac{1}{\beta'}\,, \\[2ex] \dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\delta}=\dfrac{1}{r}\pm\dfrac{1}{\gamma'}\,; \end{array}\right\}(12)\qquad \left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{1}{r}\mp\dfrac{1}{\alpha'}\,, \\[2ex] \dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{r}\mp\dfrac{1}{\beta'}\,, \\[2ex] \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{r}\mp\dfrac{1}{\gamma'}\,, \end{array}\right\}(13)$$

c'est-à-dire, *la somme des inverses des rayons des sphères ex-inscrites sur deux faces d'un tétraèdre, est égale à la somme ou à la différence des inverses des rayons de la sphère inscrite et de la sphère ex-inscrite sur l'arête de ces deux faces ou sur son opposée.*

Si le tétraèdre est régulier, on a $\alpha=\beta=\gamma=\delta=2r$, $\alpha'=\beta'=\gamma'=\infty$; d'où résulte ce théorème :

Si, à un angle trièdre régulier dont les trois angles plans sont les deux tiers d'un angle droit, on inscrit une suite de sphères, de manière que chacune d'elles touche celle qui la précède immédiatement, les rayons de ces sphères formeront une progression géométrique dont la raison sera deux.