ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

PLUCKER

Géométrie analytique. Recherches sur les courbes algébriques de tous les degrés

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 97-106
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__97_0>

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Recherches sur les courbes algébriques de tous les degrés ;

Par M. le docteur Plucker, professeur à l'Université de Bonn.

Je me propose, dans l'essai que l'on va lire, de donner quelques exemples d'une méthode à l'aide de laquelle on peut déduire, immédiatement et sans aucune sorte de calcul, un grand nombre de propriétés générales des courbes de tous les degrés, de la simple considération de la constitution algébrique des équations qui les représentent. Dans un autre essai, qui suivra de près celui-ci, j'étendrai ces considérations aux surfaces courbes.

§. I.

On sait que cinq points sont nécessaires sur un plan pour déterminer complètement une courbe du second degré, et que, généralement parlant, il n'en saurait passer qu'une seule par cinq points donnés ; d'où il suit qu'on en peut faire passer une infinité par quatre points donnés ; il n'est donc pas étonnant, d'après cela, que deux courbes de ce degré se coupent en quatre points.

Mais on sait aussi que neuf points suffisent sur un plan pour déterminer complètement une courbe du troisième degré, et, qu'en général, il n'en saurait passer plus d'une par neuf points donnés ; on doit donc, d'après cela, éprouver quelque surprise de voir deux courbes de ce degré se couper en neuf points.

Pareillement, quatorze points suffisant sur un plan pour déterminer complètement une courbe du quatrième degré; et une courbe unique de ce degré pouvant en général être conduite par ces quatorze points; on ne saurait voir sans surprise deux courbes de ce degré se couper en seize points.

En général, le nombre des points nécessaires, sur un plan, pour déterminer complètement une courbe du $m.^{ieme}$ degré est, comme l'on sait, $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-1$, et il n'en saurait passer plus d'une de ce degré par un tel nombre de points. D'un autre côté, deux courbes de ce degré, tracées sur un même plan, peuvent se couper en m^2 points. Si donc on choisit le nombre entier m, de telle sorte que m^2 soit au moins égal à $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-1$, ce qui arrivera pour toutes les valeurs de $m>2$; on aura un exemple de deux courbes du même degré se coupant en autant de points au moins qu'en exigerait la détermination complète de l'une d'elles.

Cramer, dans son *Introduction à l'analyse des courbes algébriques*, est le premier, je crois, qui ait signalé cette espèce de paradoxe qui s'explique aisément en remarquant que, lorsqu'il est question du nombre des points nécessaires et suffisans sur un plan, pour déterminer complètement une courbe d'un degré déterminé, on sous-entend toujours que ces points sont pris au hasard, et ne sont liés entre eux par aucune relation particulière. Je l'avais rencontré moi-même en discutant la théorie de l'osculation des lignes courbes; en cherchant à l'interpréter géométriquement, j'ai été conduit à quelques théorèmes assez singuliers au premier aspect, mais très-féconds en beaux corollaires; ils ont déjà paru autre part, mais je crois devoir les reproduire ici avec plus de développemens. J'indiquerai ensuite brièvement quelques-unes des applications dont ils sont susceptibles.

§. II.

Bien qu'en général, passé $m=2$, le nombre m^2 des points d'intersections de deux courbes du $m.^{ieme}$ degré soit plus grand que le nombre $\frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} - 1$ des points nécessaires pour déterminer l'une d'elles, on peut néanmoins faire passer par ces m^2 points, non seulement les deux courbes dont ils sont les intersections, mais encore une infinité d'autres courbes du $m.^{ieme}$ degré, de sorte qu'il faut se donner un point de plus pour déterminer complètement une d'entre elles. Si, en effet, on représente par

$$M=0 \ , \qquad M'=0 \ ,$$

les équations de ces deux courbes, l'équation du même degré

$$\mu M+M'=0 \ ,$$

dans laquelle μ est supposé un coefficient constant indéterminé, exprimera une infinité d'autres courbes du $m.^{ieme}$ degré, passant par les m^2 points d'intersection des deux premières; mais si l'on se donne arbitrairement un nouveau point de l'une d'elles, outre ceux-là il en résultera une équation linéaire pour la détermination de μ; de sorte qu'alors la courbe sera complètement déterminée.

Cela posé, soient $\frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} - 2$ points donnés sur un plan; concevons qu'on ait décrit toutes les courbes, en nombre infini, qui peuvent passer par ces points, et considérons deux d'entre elles en particulier; elles auront m^2 points d'intersection, savoir : les $\frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} - 2$ points donnés, et $m^2 - \left(\frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} - 2\right)$ nouveaux points; or, d'après ce qui précède, par ces m^2 points, on pourra faire passer une infinité d'autres courbes du m.^{ieme} degré, lesquelles seront les autres courbes de la série dont il s'agit, puisqu'elles passeront par les $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-2$ points donnés; donc toutes ces courbes passent aussi par les $m^2-\left(\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-2\right)$ points restans; en invoquant donc le principe de dualité on aura ces deux théorèmes :

THÉORÈME I. Toutes les courbes du m.^{ieme} *degré qui passent par les* $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-2$ *mêmes points fixes, se coupent en outre aux* $m^2-\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}+2$, *autres mêmes points fixes.*

Ainsi, par exemple, toutes les courbes du troisième degré qui passent par les huit mêmes points fixes, se coupent en outre en un neuvième même point fixe. De même encore, toutes les courbes du quatrième degré qui passent par les treize mêmes points fixes, se coupent toutes en outre en trois autres mêmes points fixes, et ainsi du reste.

THÉORÈME I. Toutes les courbes de m.^{ieme} *classe qui touchent les* $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-2$ *mêmes droites fixes, touchent en outre les* $m^2-\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}+2$, *autres mêmes droites fixes.*

Ainsi, par exemple, toutes les courbes de troisième classe qui touchent les huit mêmes droites fixes, touchent en outre une neuvième même droite fixe. De même encore, toutes les courbes de quatrième classe qui touchent les treize mêmes droites fixes, touchent en outre les trois autres mêmes droites fixes, et ainsi du reste.

Rien n'empêche d'admettre, dans le théorème qui précède, que tous ou partie des points fixes donnés se confondent par groupes plus ou moins nombreux en un point unique, auquel cas les courbes dont il s'agit auront en ces points des contacts d'ordres plus ou moins élevés.

Ainsi, par exemple, au lieu de considérer toutes les courbes du troisième degré qui passent par les huit mêmes points fixes, on peut considérer toutes celles qui, passant par les deux mêmes points fixes, ont entre elles, en chacun de ces points, un contact de quatre points ou du troisième ordre; et l'on verra, en vertu du théorème, qu'elles doivent se couper toutes en un troisième point.

Nous n'avons comparé, dans ce qui précède, que des courbes exprimées par des équations complètes dans lesquelles tous les coefficiens étaient supposés indéterminés; mais en assujétissant ces courbes à certaines conditions, nous pourrons rabaisser, à volonté, le nombre des constantes arbitraires de leur équation commune. Nous pourrons, par exemple, regarder comme donnés, un certain nombre de ces coefficiens pour toutes les courbes que nous comparons, ou bien supposer qu'il existe entre tous ou partie d'entre eux un certain nombre d'équations de condition. Ces considérations conduisent au théorème suivant plus général que celui que nous avions d'abord établi :

THÉORÈME II. Etant donnés n *coefficiens de l'équation générale du* m.ieme *degré à deux indéterminées, ou encore étant données* n *équations linéaires entre tous ou partie de ces coefficiens; toutes les courbes représentées par l'équation générale, ainsi modifiée et passant par les* $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-(n+2)$ *mêmes points fixes donnés, se couperont en outre aux* $m^2-\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}+(n+2)$ *autres mêmes points fixes.*

Il est évident que, dans l'application de ce théorème, on ne doit pas supposer $n>\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-1$.

§. III.

Notre théorème, sous sa première forme, ne saurait s'appliquer qu'aux courbes des degrés supérieurs au second; mais, sous la seconde, il s'applique fort bien aux courbes du second degré. Il prend alors la forme particulière que voici :

Etant donnés n *coefficiens de l'équation générale du second degré à deux indéterminées, ou encore, étant données* n *équations linéaires entre tous ou partie de ces coefficiens; toutes les courbes représentées par l'équation générale ainsi modifiée et passant par les* 4—n *mêmes points fixes donnés, se coupent en outre aux* n *autres mêmes points fixes.*

Ainsi l'équation générale du second degré à deux indéterminées étant

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0\,, \qquad (1)$$

dans laquelle il est permis de supposer F connu; si l'on donne 1.° un des cinq autres coefficiens et trois points ; 2.° deux d'entre eux et deux points ; 3.° trois d'entre eux et un point; 4.° enfin quatre d'entre eux, il y aura, dans tous les cas, un nombre infini de courbes représentées par l'équation (1), et toutes ces courbes passeront par les quatre mêmes points. Il en sera de même si, au lieu de se donner un certain nombre de ces coefficiens, on se donne un égal nombre d'équations entre tous ou partie d'entre eux. On va voir, par quelques exemples pris au hasard, avec quelle facilité on déduit de là la plupart des propriétés des courbes du second degré.

On sait que, dans l'hypothèse des coordonnées rectangulaires, l'équation (1) représente des hyperboles équilatères lorsqu'on a $A+B=0$; donc

Toutes les hyperboles équilatères qui passent par les trois mêmes points donnés, se coupent en outre en un quatrième point fixe.

Le système de deux droites perpendiculaires l'une à l'autre peut, comme l'on sait, être considéré comme une hyperbole équilatère; en conséquence, les trois systèmes de bases et de hauteurs, d'un même triangle, peuvent être considérés comme trois hyperboles équilatères ayant trois points communs, qui sont les sommets du triangle ; elles doivent donc avoir un quatrième point commun ; et ainsi se trouve démontré que *les trois hauteurs de tout triangle concourent en un même point.*

Etant donné l'un des deux rapports $\frac{C}{A}$ ou $\frac{C}{B}$, on connaît deux diamètres conjugués de la courbe, dont un est parallèle à l'un des axes des coordonnées; donc

Toutes les coniques qui ont deux diamètres conjugués parallèles à deux droites fixes, et qui passent par trois points fixes, se coupent en outre en un quatrième point fixe.

La construction de ce quatrième point étant très-facile, on pourra trouver tant de points qu'on voudra, 1.° d'une conique dont on connaîtra quatre points, avec les directions de deux diamètres conjugués ; 2.° d'une conique dont on connaîtra trois points, avec les directions de deux systèmes de diamètres conjugués.

Et de là encore cet autre théorème :

Toutes les coniques qui passent par les quatre mêmes points fixes ont un système de diamètres conjugués parallèles à deux droites fixes.

On sait que l'équation

$$By+Cx+E=0$$

est celle du diamètre de la courbe (1) dont le conjugué est parallèle à l'axe des x; d'où il suit que, $\frac{E}{B}$ étant donnée, on connaîtra le point d'intersection de ce diamètre avec l'axe des y; c'est-à-dire, si cet axe rencontre la courbe, le point milieu de la corde interceptée. Etant donné un quelconque (a, b) des points de la direction de ce diamètre, on aura

$$Bb+Ca+E=0 ,$$

c'est-à-dire, une équation linéaire entre les trois coefficiens B, C,

E. En connaissant de plus l'un quelconque (a', b') des points de la direction du diamètre dont le conjugué est parallèle à l'axe des y, on aura semblablement

$$Aa'+Cb'+D=0 ;$$

c'est-à-dire, une équation linéaire entre les trois coefficiens A, C, D. Enfin, une droite quelconque étant donnée par l'équation

$$\alpha x+\beta y+\gamma=0 ,$$

l'équation du diamètre dont le conjugué lui est parallèle sera

$$\alpha(By+Cx+E)=\beta(Ax+Cy+D) ;$$

équation linéaire par rapport à A, B, C, D, E. On pourra se donner une, deux, trois ou quatre équations de la même forme. Dans ce dernier cas, en supposant un de ces coefficiens donné, ce qui est permis pourvu qu'on rende au dernier terme F son indétermination, ils seront tous complètement déterminés excepté celui-là. De ces considérations se déduisent, sur-le-champ, les théorèmes suivans :

Toutes les coniques qui passent par trois points donnés, et dans lesquelles les conjugués des diamètres parallèles à une même droite fixe vont concourir en un même point fixe, se coupent en outre en un quatrième point.

Si tant de coniques qu'on voudra passent toutes par les quatre mêmes points, les conjugués de leurs diamètres parallèles à une même droite fixe concourront tous en un même point fixe.

Ce dernier théorème, dû à M. Lamé (*Annales*, tom. VII, pag. 229), peut être complété de la manière suivante :

Si la droite, à laquelle les diamètres sont parallèles, tourne sur l'un quelconque des points de sa direction, le point de concours des conjugués de ces diamètres décrira une conique, lieu géométri-

ques des centres de toutes les coniques passant par les quatre points donnés (*).

Si deux coniques sont telles qu'elles interceptent, sur une même droite donnée, des cordes dont les milieux coïncident; la même chose aura lieu pour toutes les coniques qui, passant par les quatre points d'intersection de ces deux là, couperont la droite donnée.

Généralement, *toutes les coniques passant par* $4-\text{n}$ *points donnés, et assujéties en outre à la condition que les conjugués de* n *de leurs diamètres, parallèles à* n *droites données, passent par* n *points fixes, se coupent en outre en* n *points.*

Si $n=4$, les coniques seront semblables et concentriques, de manière que les points d'intersection passeront à l'infini.

Pour dernier exemple, supposons deux points (a, b), (a', b') tels que l'un d'eux soit situé sur la polaire de l'autre relativement à la courbe (1); cette circonstance sera exprimée par l'équation

$$b(Bb'+Ca'+E)+a(Aa'+Cb'+D)+(Da'+Eb'+F)=0\ ,$$

ou

$$Aaa'+Bbb'+C(ab'+ba')+D(a+a')+E(b+b')+F=0\ ;$$

équation dont la symétrie prouve qu'alors réciproquement l'autre point se trouve situé sur la polaire du premier. Or, c'est là une équation linéaire entre les coefficiens de l'équation (1), et chaque système de deux pareils points en fournirait une semblable; donc

Toutes les coniques passant par $4-\text{n}$ *points donnés, et assujéties à la condition que, par rapport à elles, les polaires de* n *points donnés quelconques passent respectivement par autant de points*

Toutes les coniques touchant $4-\text{n}$ *droites données, et assujéties à la condition que, par rapport à elles, les pôles de* n *droites données quelconques soient situés respectivement sur autant de droi-*

(*) C'est précisément ce qui a été démontré à la pag. 106 du précédent volume.

J. D. G.

également donnés, se coupent toutes aux quatre mêmes autres points.

tes également données, touchent toutes les quatre mêmes autres droites fixes.

On voit de suite que ce dernier théorème conduit à ceux qui ont été démontrés auparavant, lorsqu'on suppose que les n pôles passent à l'infini.

Bonn, 8 juin 1828.