GERGONNE

Analyse élémentaire. Note sur l'élimination dans les équations du premier degré

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 109-115
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__109_0>

ANALYSE ÉLÉMENTAIRE.

Note sur l'élimination dans les équations du premier degré ;

Par M. GERGONNE.

Je reçois assez fréquemment, et depuis fort long-temps, sur l'élimination au premier degré, des mémoires dans lesquels on reproche à tel ou à tel autre auteur d'élémens de n'avoir pas discuté d'une manière assez complète les valeurs générales des inconnues auxquelles conduit cette élimination, et où on tente, d'une manière plus ou moins heureuse, de suppléer à ce qu'ils ont omis.

Si jusqu'ici je n'ai pas donné à ces mémoires la publicité que leurs auteurs réclamaient pour eux, c'est parce qu'il m'a toujours semblé que la discussion qu'ils avaient pour but de compléter n'avait rien de bien difficile ; qu'elle n'avait pas au fond une très-grande utilité pratique ; que bornée, comme elle, par les auteurs de ces mémoires, au cas de trois équations entre trois inconnues, elle est ainsi beaucoup trop circonscrite ; qu'on ne saurait l'étendre au-delà sans s'engager dans des détails et des distinctions presque interminables et sans se mettre dans la nécessité d'écrire des formules d'une étendue démesurée ; et enfin, parce que, eût-on poussé la discussion jusqu'au cas de dix équations entre dix inconnues, ce que personne, je pense, n'aurait le courage de tenter, ce serait encore exactement comme si l'on n'avait rien fait, puisque le nombre des cas omis serait toujours infiniment plus grand que le nombre de ceux dont on se serait occupé.

Il y a déjà long-temps que j'ai songé à remplacer, dans mes cours, ces fastidieuses et peu utiles discussions, par quelque chose à la fois de plus général, de plus direct et de plus simple. Je n'en ai rien publié jusqu'ici, parce qu'il m'a semblé que cela pouvait être très-aisément imaginé par tout le monde ; et si je le fais présentement, c'est uniquement dans la vue de justifier l'espèce de délaissement que je me suis permis à l'égard des nombreux mémoires qu'on m'a fait l'honneur de m'adresser sur ce sujet.

Au surplus, comme il ne s'agit ici que de choses fort simples et fort élémentaires, afin de ne leur pas donner plus d'étendue qu'elles n'en méritent, je me bornerai à de simples assertions, à des espèces d'aphorismes dont le lecteur, au courant de ces matières, apercevra la raison à la simple vue.

1. Lorsque des grandeurs inconnues sont liées entre elles par des équations du premier degré, ou bien le nombre de ces équations est inférieur au nombre des inconnues, ou bien il lui est égal, ou bien enfin il est plus grand. Dans le premier cas, le problème est tout au moins indéterminé et il peut être impossible ; dans les deux autres, il peut être indistinctement déterminé, indéterminé ou impossible.

2. Lorsqu'un problème qui donne au moins autant d'équations que d'inconnues est *indéterminé*, cela vient nécessairement de ce qu'une ou plusieurs de ses équations sont *équivalentes* à une ou plusieurs autres ; lorsqu'un problème est *impossible*, c'est qu'une ou plusieurs de ces équations sont *incompatibles* avec une ou plusieurs des autres.

3. L'indétermination ou l'impossibilité d'un problème se manifeste, dans le calcul même des valeurs des inconnues, en ce que l'on est conduit à des équations qui ne renferment plus aucune inconnues et qui sont identiques si le problème est indéterminé, ou absurdes, s'il est impossible. Ces circonstances se manifestent aussi en ce que les valeurs des inconnues, ou du moins de quelques-

unes d'entre elles, se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$ si le problème est indéterminé, ou sous la forme $\frac{a}{0}$ si le problème est impossible. Dans ce dernier cas on doit abandonner le problème; dans le premier, il s'agit de reconnaître quelles sont les équations essentiellement distinctes.

4. Mais, dans l'un et dans l'autre cas, on aura fait des calculs inutiles si l'on a commencé par chercher les valeurs des inconnues; et il est clair qu'on aurait pu se les épargner, si l'on avait su résoudre cette question : *Des équations du premier degré en nombre quelconque, entre des inconnues, étant données, découvrir si, parmi ces équations, il s'en trouve d'équivalentes ou de contradictoires ?* C'est donc là le problème qui doit principalement nous occuper.

5. Soient d'abord $A, B, C, \ldots\ldots G, H$ des inconnues en nombre quelconque, et soient les deux équations

$$\left.\begin{array}{l} aA+bB+cC+\ldots\ldots+gG+hH+k=0\ , \\ a'A+b'B+c'C+\ldots\ldots+g'G+h'H+k'=0\ ; \end{array}\right\} \quad (1)$$

soient posées

$$ma+a'=0\ ,\quad mb+b'=0\ ,\quad mc+c'=0\ ,\quad \ldots\ldots\quad mg+g'=0\ ,\quad mh+h'=0\ ;\ (2)$$

si la valeur de m, tirée de l'une quelconque des équations (2), satisfait à toutes les autres, sans satisfaire à l'équation $mk+k'=0$, on en conclura que les deux équations (1) sont incompatibles; si, au contraire, cette valeur de m satisfait à la dernière équation, il s'ensuivra que les équations (1) sont équivalentes et ne doivent compter que pour une seule; mais si la valeur de m, tirée de l'une quelconque des équations (2), ne satisfaisait pas à toutes les autres, les deux équations (1) ne seraient ni incompatibles, ni équivalentes.

6. Qu'on ait présentement tant d'équations qu'on voudra, de la

forme des équations (1), on les soumettra, deux à deux, de toutes les manières possibles, à l'épreuve qui vient d'être expliquée. Si, au moyen de cette épreuve, on reconnaît que deux d'entre elles, au moins, sont incompatibles, on abandonnera le problème. Si, au contraire, on ne trouve point de couple d'équations incompatibles, toutes les fois qu'on rencontrera deux équations équivalentes, on supprimera l'une d'elles, et si les équations restantes sont au nombre de plus de deux, on les soumettra à l'épreuve nouvelle qui va être expliquée.

Soient les trois équations

$$\left.\begin{array}{l} aA+bB+cC+\dots\dots\dots+gG+hH+k=0\,, \\ a'A+b'B+c'C+\dots\dots\dots+g'G+h'H+k'=0\,, \\ a''A+b''B+c''C+\dots\dots\dots+g''G+h''H+k''=0\,, \end{array}\right\} \quad (3)$$

telles que deux quelconques d'entre elles ne soient ni contradictoires ni équivalentes. Soient posées les équations

$$\left.\begin{array}{l} ma+m'a'+a''=0\,, \\ mb+m'b'+b''=0\,, \\ mc+m'c'+c''=0\,, \\ \dots\dots\dots\dots \\ mg+m'g'+g''=0\,, \\ mh+m'h'+h''=0\,. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Parmi ces dernières, il s'en trouvera au moins deux desquelles on pourra tirer les valeurs de m et de m'. Si ces valeurs satisfont à toutes les autres, sans satisfaire à l'équation

$$mk+m'k'=k''=0\,, \qquad (5)$$

on en conclura que chacune des équations (3) est incompatible avec les deux autres. Si, au contraire, ces valeurs de m et m' satisfont à l'équation (5), il s'ensuivra que chacune des équations (3) est comportée par les deux autres, et qu'elles n'équivalent conséquemment qu'à deux équations distinctes. Mais si les valeurs de m et de m', tirées de deux quelconques des équations (4), ne satisfaisaient pas à la totalité des autres, les trois équations (3) ne seraient ni incompatibles ni équivalentes à deux seulement.

7. Qu'on ait présentement tant d'équations qu'on voudra de la forme des équations (3), desquelles on se soit préalablement assuré (6) que, prises deux à deux, elles ne sont ni contradictoires ni équivalentes ; on les soumettra, trois à trois, de toutes les manières possibles, à l'épreuve qui vient d'être expliquée ; si, au moyen de cette épreuve, on reconnaît que trois d'entre elles, au moins, sont incompatibles, on abandonnera le problème. Si, au contraire, on ne rencontre aucun système de trois équations incompatibles, toutes les fois qu'on rencontrera trois équations telles que chacune d'elles sera comportée par les deux autres, on supprimera l'une d'elles, et, si les équations restantes sont au nombre de plus de trois, on les soumettra à l'épreuve nouvelle qui va être expliquée.

8. Soient les quatre équations

$$\left.\begin{array}{l} aA+bB+cC+\dots\dots\dots+gG+hH+k=0\ , \\ a'A+b'B+c'C+\dots\dots\dots+g'G+h'H+k'=0\ , \\ a''A+b''B+c''C+\dots\dots\dots+g''G+h''H+k''=0\ , \\ a'''A+b'''B+c'''C+\dots\dots\dots+g'''G+h'''H+k'''=0\ , \end{array}\right\} \quad (6)$$

que nous supposons telles que, deux à deux ou trois à trois, elles ne soient ni contradictoires ni rentrantes. Soient posées les équations

$$\left.\begin{array}{l} ma+m'a'+m''a''+a'''=0\ , \\ mb+m'b'+m''b''+b'''=0\ , \\ mc+m'c'+m''c''+c'''=0\ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\ ; \\ mg+m'g'+m''g''+g'''=0\ , \\ mh+m'h'+m''h''+h'''=0\ . \end{array}\right\} \quad (7)$$

Parmi ces dernières il s'en trouvera au moins trois desquelles on pourra tirer les valeurs de m, m' et m''. Si ces valeurs satisfont à toutes les autres, sans satisfaire à l'équation

$$mk+m'k'+m''k''+k'''=0\ , \qquad (8)$$

on en conclura que chacune des équations (6) est incompatible avec les trois autres. Si, au contraire, ces valeurs de m, m' et m'' satisfont à l'équation (8), il s'ensuivra que chacune des équations (6) est comportée par les trois autres, et qu'ainsi elles n'équivalent qu'à trois équations distinctes. Mais si les valeurs de m, m' et m'', tirées de trois quelconques des équations (7), ne satisfont pas à la totalité des autres, les quatre équations (6) ne seront ni incompatibles, ni équivalentes à trois seulement.

9. Qu'on ait présentement tant d'équations qu'on voudra, de la forme des équations (6), desquelles on se soit préalablement assuré (6, 7) que, prises deux à deux ou trois à trois, elles ne sont ni contradictoires, ni équivalentes ; on les soumettra, quatre à quatre, de toutes les manières possibles, à l'épreuve qui vient d'être expliquée. Si, au moyen de cette épreuve, on reconnaît que quatre d'entre elles sont incompatibles, on abandonnera le problème.

Si, au contraire, on ne rencontre aucun système de quatre équations incompatibles, toutes les fois qu'on rencontrera quatre équations telles que chacune d'entre elles sera comportée par les trois autres, on supprimera l'une d'elles, et, si les équations restantes sont au nombre de plus de quatre, on aura une nouvelle épreuve à leur faire subir.

10. La marche de ces épreuves successives est assez évidente pour rendre tout développement ultérieur superflu. On voit qu'en y soumettant les équations proposées on saura positivement si le problème est impossible, et que, dans le cas contraire, on se trouvera avoir supprimé toutes les équations et les seules équations superflues; les équations ne se trouveront donc plus alors qu'en nombre tout au plus égal à celui des inconnues; et si, en effet, elles sont en tel nombre, on trouvera, pour ces inconnues, des valeurs qui ne seront ni infinies ni indéterminées. Si elles sont en moindre nombre, on ne réputera telles que des inconnues en nombre égal à celui des équations, et on en obtiendra, sans difficulté, leurs valeurs, en fonction des inconnues surabondantes.

Ceci paraît fort clair et fort simple; mais comme cela sort de la routine, de l'ornière, il est très-peu probable que les géomètres qui écriront à l'avenir des élémens d'algèbre y donnent la plus légère attention, comme on n'en a donné aucune à la manière rapide de parvenir aux valeurs générales des inconnues que nous avons indiquées à la pag. 281 de notre XII.me volume, pas plus qu'à la méthode plus générale, et en même temps plus briève, que nous avons donnée à la pag. 148 de notre IV.me volume, bien que l'idée fondamentale de cette dernière soit due à Laplace. Il semble vraiment que ce soit un parti pris de laisser les élémens stationnaires, tandis que les branches élevées de la science font chaque jour de si notables progrès.