ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

Arithmétique. Abréviation de l'extraction des racines numériques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 125-127
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__125_1>

ARITHMÉTIQUE.

Abréviation de l'extraction des racines numériques;

Par M. Bobillier, professeur à l'école des arts et métiers de Châlons-Sur-Marne.

Soit un nombre entier dont on veut obtenir la racine $m.^{ieme}$, soient a une partie de cette racine déjà obtenue, x ce qu'il faut lui ajouter pour compléter la racine demandée et r le reste obtenu en retranchant du nombre proposé la $m.^{ieme}$ puissance de la première partie de cette racine; ce nombre sera ainsi indifféremment a^m+r ou $(a+x)^m$. On aura donc

$$a^m+r=(a+x)^m=a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}x^2+\ldots\ldots$$

ou, en supprimant a^m de part et d'autre et divisant ensuite par ma^{m-1}

$$\frac{r}{ma^{m-1}}=x+\frac{m-1}{2}\frac{x^2}{a}+\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{x^3}{a^2}+\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot\frac{x^4}{a^3}+\ldots.$$

d'où l'on voit qu'en divisant r par ma^{m-1} on obtiendra le surplus x de la racine, à moins d'une demi-unité près, pourvu qu'on ait

$$\tfrac{1}{2} > \frac{m-1}{2} \cdot \frac{x^2}{a} + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{x^3}{a^2} + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{x^4}{a^3} + \ldots$$

ou bien

$$\tfrac{1}{2} > \frac{m-1}{2} \cdot \frac{x^2}{a} \left\{ 1 + \frac{m-2}{3} \cdot \frac{x}{a} + \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{x^2}{a^2} + \ldots \right\}.$$

Où cette inégalité ne cessera pas d'être satisfaite si, dans son second membre, on remplace les fractions $\frac{m-3}{4}$, $\frac{m-4}{5}$, $\frac{m-5}{6}$, ..., par la fraction plus grande $\frac{m-2}{3}$, et qu'on prolonge en outre ce second membre à l'infini ; de sorte qu'il suffit qu'on ait

$$\tfrac{1}{2} > \frac{m-1}{2} \cdot \frac{x^2}{a} \left\{ 1 + \left(\frac{m-2}{3} \cdot \frac{x}{a}\right) + \left(\frac{m-2}{3} \cdot \frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{m-2}{3} \cdot \frac{x}{a}\right)^3 + \ldots \right\};$$

ou bien

$$1 > \frac{(m-1)x^2}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{m-2}{3} \cdot \frac{x}{a}},$$

ou encore

$$1 > \frac{3(m-1)x^2}{3a-(m-2)x};$$

ou enfin

$$3a > x\{3(m-1)x+(m-2)\}.$$

Pour que cette dernière inégalité soit satisfaite, il suffira que le nombre des chiffres de son premier membre surpasse le nombre de ceux du second ; ou, plus simplement, que le nombre des chiffres de $3a$ surpasse le nombre des chiffres de $3(m-1)x^2$; ou que le nombre des chiffres de a surpasse le nombre des chiffres de $(m-1)x^2$ ou de mx^2. Or, x^2 a au plus le double du nombre des chiffres de x; d'où il suit que mx^2 aura au plus le double du nombre des chiffres de x augmenté du nombre des chiffres de m; d'où résulte la règle suivante :

Si, cherchant la racine m.ieme *d'un nombre entier, on a déjà obtenu un nombre de chiffres de cette racine qui soit au moins égal au nombre de ceux qui restent encore à trouver, augmenté du nombre des chiffres de l'exposant, on obtiendra le surplus de la racine cherchée, à moins d'une demi-unité près, en divisant simplement le reste de l'opération par* m *fois la* (m—1)ieme *puissance de la racine déjà obtenue, et négligeant le reste de cette division.*

Dans le cas particulier où $m=2$, cette règle rentre exactement dans celle qu'on donne dans les traités élémentaires, pour l'extraction de la racine quarrée; mais on voit en même temps qu'elle a une étendue qu'on ne paraît pas lui avoir soupçonné jusqu'ici (*).

(*) On ne paraît pas avoir songé non plus, pour l'extraction de la racine quarrée, au procédé très-brief que voici, et qui serait susceptible d'une extension analogue à celle que M. Bobillier vient de donner au premier.

Cherchez, à l'ordinaire, les deux premiers chiffres de la racine; quarrez et retranchez. Divisez le reste par le double de la racine déjà obtenue, et vous aurez le troisième chiffre de la racine. Quarrez et retranchez encore; divisez le reste par le double de toute la racine obtenue, et vous obtiendrez les deux chiffres suivans, ce qui fera *cinq*. Quarrez et retranchez; divisez le reste par le double de toute la racine obtenue, et vous obtiendrez les quatre chiffres suivans, ce qui fera *neuf*. Quarrez et retranchez; divisez le reste par le double de toute la racine obtenue, et vous obtiendrez les huit chiffres suivans, ce qui fera *dix-sept*; et ainsi de suite.

J. D. G.