
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

VALLÈS

Questions résolues. Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la pag. 315 du précédent volume, et d'un autre théorème analogue

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 128-133

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__128_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1829-1830, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS RÉSOLUES.

*Démonstration du théorème de géométrie énoncé
à la pag. 315 du précédent volume , et d'un
autre théorème analogue ;*

Par M. VALLÈS , ingénieur des ponts et chaussées , ancien
élève de l'Ecole polytechnique.



THÉORÈME 1. *La perpendiculaire abaissée de l'un quelconque des sommets d'un parallélogramme quelconque , sur un plan conduit arbitrairement par son opposé , est égale à la somme des perpendiculaires abaissées sur le même plan des deux sommets restans.*

Démonstration. Soit S celui des sommets du parallélogramme par lequel est supposé conduit le plan dont il s'agit ; soit S' son opposé , A et B les deux sommets restans , et C l'intersection , milieu commun des deux diagonales SS' et AB ; et convenons de désigner la longueur de chaque perpendiculaire par la lettre minuscule qui correspond à la lettre majuscule qui désigne le point d'où elle part.

Parce que le point C est le milieu de SS' , nous aurons

$$s' = 2c ;$$

mais , parce que ce point C est le milieu de AB , nous aurons , par la propriété du trapèze ,

$$2c = a + b ;$$

donc finalement

$$s' = a + b ,$$

comme l'annonce le théorème.

Donc, si tant de parallélogrammes qu'on voudra, situés ou non dans un même plan, ont une diagonale commune, la somme des perpendiculaires abaissées des deux extrémités de l'autre diagonale, sur un plan conduit arbitrairement par l'une des extrémités de la première, sera une quantité constante pour tous ces parallélogrammes.

Il est facile de conclure de là 1.^o que la perpendiculaire abaissée de l'un quelconque des sommets d'un parallélogramme quelconque, sur une droite conduite arbitrairement dans son plan, par le sommet opposé, est égale à la somme des perpendiculaires abaissées sur la même droite de ses deux autres sommets; 2.^o que, si tant de parallélogrammes qu'on voudra, situés dans un même plan, ont une diagonale commune, la somme des perpendiculaires abaissées des deux extrémités de l'autre diagonale, sur une droite conduite arbitrairement, dans ce plan, par l'une des extrémités de la première, sera une quantité constante pour tous ces parallélogrammes.

THÉORÈME II. La perpendiculaire abaissée de l'un quelconque des sommets d'un parallépipède quelconque, sur un plan conduit arbitrairement par le sommet opposé, est égale à la somme des perpendiculaires abaissées sur le même plan des trois sommets qui environnent ce dernier; cette même perpendiculaire est la moitié seulement de la somme des perpendiculaires abaissées sur ce plan des trois sommets restans, respectivement opposés à ces trois là.

Démonstration. Soit S le sommet du parallépipède par lequel est supposé conduit le plan dont il s'agit; soient S' le sommet opposé, A, B, C les trois sommets qui environnent le sommet S, et A', B', C' les trois sommets restans, respectivement opposés à

ces trois là ; et convenons encore ici de désigner la longueur de chaque perpendiculaire par la lettre minuscule qui correspond à la majuscule qui désigne le point d'où elle part.

La droite SS' étant une diagonale commune à trois parallélogrammes, dont les secondes diagonales sont AA' , BB' , CC' , on doit avoir (*Théorème I*),

$$\left. \begin{aligned} s' &= a + a' , \\ s' &= b + b' , \\ s' &= c + c' . \end{aligned} \right\} (1)$$

Mais dans les trois parallélogrammes qui concourent au sommet S , on a aussi (*Théorème I*)

$$\left. \begin{aligned} a' &= b + c , \\ b' &= c + a , \\ c' &= a + b , \end{aligned} \right\} (2)$$

ajoutant deux équations correspondantes quelconques, dans les deux groupes (1) et (2), il viendra, en réduisant,

$$s' = a + b + c , \quad (3)$$

comme l'annonce la première partie du théorème.

Si, ensuite de la somme des équations (1), on retranche l'équation (3), il viendra, en réduisant,

$$2s' = a' + b' + c' ,$$

comme l'annonce la seconde partie du théorème.

Donc aussi, *si tant de parallépipèdes qu'on voudra ont une diagonale commune, et que, par l'une des extrémités de cette dia-*

gonale, on conduise arbitrairement un plan, la somme des perpendiculaires abaissées sur ce plan des trois sommets qui environnent l'une ou l'autre extrémité de cette diagonale sera une quantité constante pour tous ces parallépipèdes.

Remarque. Il est essentiel de remarquer 1.^o que, dans ces deux théorèmes, il s'agit de *sommes algébriques*, c'est-à-dire que les perpendiculaires qui tombent de différens côtés du plan doivent y être prises avec des signes contraires; 2.^o que ces théorèmes subsistent encore en substituant aux perpendiculaires des parallèles à une droite fixe quelconque.

Applications. On peut, à l'aide de ces théorèmes, parvenir facilement à des résultats que l'on n'obtient d'ordinaire que par des procédés dépourvus d'élégance et de symétrie.

I. Soient, sur un plan, x, y les coordonnées d'un point P, rapporté à deux axes rectangulaires, et t, u les coordonnées du même point, rapporté à deux axes obliques de même origine; ces dernières, avec les axes obliques, formeront un parallélogramme dont une diagonale sera la droite menée du point P à l'origine; les perpendiculaires abaissées des deux extrémités de l'autre diagonale sur les axes des x et y seront, savoir:

$$\text{sur l'axe des } x, \quad t\text{Cos.}(t, y), \quad u\text{Cos.}(u, y),$$

$$\text{sur l'axe des } y, \quad t\text{Cos.}(t, x), \quad u\text{Cos.}(u, x);$$

on aura donc (*Théorème I*)

$$x = t\text{Cos.}(t, x) + u\text{Cos.}(u, x),$$

$$y = t\text{Cos.}(t, y) + u\text{Cos.}(u, y);$$

ce sont les formules connues pour le passage d'un système rectangulaire à un système oblique de même origine.

II. Soient, dans l'espace, x, y, z les coordonnées d'un point P rapporté à trois axes rectangulaires, et t, u, v les coordonnées du même point, rapportées à deux axes obliques de même origine; ses dernières, avec les axes obliques, seront six arêtes, opposées deux à deux, d'un parallélépipède dont une diagonale sera la droite menée du point P à l'origine, les perpendiculaires abaissées des trois sommets qui environnent l'origine sur les plans des yz , des zx et des xy , seront savoir :

sur le plan des yz , $t\text{Cos.}(t, x)$, $u\text{Cos.}(u, x)$, $v\text{Cos.}(v, x)$,

sur le plan des zx , $t\text{Cos.}(t, y)$, $u\text{Cos.}(u, y)$, $v\text{Cos.}(v, y)$,

sur le plan des xy , $t\text{Cos.}(t, z)$, $u\text{Cos.}(u, z)$, $v\text{Cos.}(v, z)$;

on aura donc (*Théorème II*)

$$x = t\text{Cos.}(t, x) + u\text{Cos.}(u, x) + v\text{Cos.}(v, x),$$

$$y = t\text{Cos.}(t, y) + u\text{Cos.}(u, y) + v\text{Cos.}(v, y),$$

$$z = t\text{Cos.}(t, z) + u\text{Cos.}(u, z) + v\text{Cos.}(v, z);$$

ce sont les formules connues qui servent, dans l'espace, à passer d'un système rectangulaire à un système oblique de même origine.

III. Soient R l'une des diagonales d'un parallélogramme, et r, r' les deux côtés de ce parallélogramme qui concourent avec l'une de ses extrémités; par cette extrémité conduisons arbitrairement, dans le plan du parallélogramme, deux axes rectangulaires; et soient alors respectivement (a, b) , (a', b') , (A, B) , les extrémités des droites r, r', R ; nous aurons (*Théorème I*)

$$A = a + a';$$

$$B = b + b';$$

en prenant la somme des carrés de ces deux équations, il viendra

$$R^2 = r^2 + r'^2 + 2(aa' + bb') ;$$

mais on sait que

$$aa' + bb' = rr' \text{Cos.}(r, r') ;$$

donc , en substituant ,

$$R^2 = r^2 + r'^2 + 2rr' \text{Cos.}(r, r') ;$$

IV. Soient R l'une des diagonales d'un parallépipède et r, r', r'' les trois arêtes de ce parallépipède qui concourent à l'une de ses extrémités ; par cette extrémité conduisons, arbitrairement, dans l'espace, trois axes rectangulaires ; et soient alors respectivement $(a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c''), (A, B, C)$ les extrémités des droites r, r', r'', R ; nous aurons (*Théorème II*)

$$A = a + a' + a'' ,$$

$$B = b + b' + b'' ,$$

$$C = c + c' + c'' ;$$

en prenant la somme des quarrés de ces équations , il viendra

$$R^2 = r^2 + r'^2 + r''^2 + 2(a'a'' + b'b'' + c'c'') + 2(a''a + b''b + c''c) + 2(aa' + bb' + cc') ;$$

mais on sait que

$$a'a'' + b'b'' + c'c'' = r'r'' \text{Cos.}(r', r'') ,$$

$$a''a + b''b + c''c = r''r \text{Cos.}(r'', r) ,$$

$$aa' + bb' + cc' = r r' \text{Cos.}(r, r') ;$$

donc , en substituant ,

$$R^2 = r^2 + r'^2 + r''^2 + 2r'r'' \text{Cos.}(r', r'') + 2r''r \text{Cos.}(r'', r) + 2rr' \text{Cos.}(r, r') ; \quad (*)$$

(*) Nous avons déjà donné, par une analyse fort simple, à la pag. 51 de notre IX.^me volume, en fonction des trois arêtes d'un même angle d'un parallépipède et des angles qu'elles forment deux à deux, non seulement la