ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

LE BARBIER

Solution de l'un des problèmes de géométrie énoncés à la pag. 379 du précédent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 134-136

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__134_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1829-1830, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Solution de l'un des problèmes de géométrie énoncés à la pag. 379 du précédent volume ;

Par MM. Le Barbier, Bonetti et Vallès.

PROBLÈME. *Y a-t-il, dans une ellipse, une corde mobile, de grandeur constante, qui, dans son mouvement, enveloppe un cercle? Et, s'il y existe une telle corde, quelle en est la longueur et quel est le rayon du cercle qu'elle enveloppe?*

Solution. La manière de traiter ce problème qui semblerait la plus naturelle et la plus directe consisterait à chercher d'abord à quelle courbe est tangente une corde d'une longueur constante quelconque, qui roule dans une ellipse, et à examiner ensuite s'il ne serait pas possible de profiter de la longueur indéterminée de cette corde constante, de telle sorte que la courbe enveloppée devînt un cercle. C'est aussi de cette manière que le problème a été attaqué par M. Le Barbier qui a même supposé d'abord, pour plus de généralité, que la courbe dans laquelle roulait la corde de longueur constante était quelconque ; mais il n'a pu pousser très-loin la solution de ce problème général. Il y a long-temps, en effet, que nous avons reconnu, M. Poncelet et moi, que, borné même à l'ellipse, ce problème est à peu près intraitable (*Annales*, tom. VIII, pag. 211).

---

diagonale, mais encore les angles qu'elle forme avec ces arêtes, ainsi que le volume du parallélipipède. On n'en a pas moins persisté depuis à employer, dans cette recherche, un triangle sphérique qui la complique et en détruit tout-à-fait la symétrie.

J. D. G.

M. Bonetti, cadet au corps royal des Pontonniers, à Modène, et Vallès, ingénieur des ponts et chaussées, ancien élève de l'Ecole polytechnique, ont eu l'heureuse idée de renverser le problème, c'est-à-dire qu'ils se sont proposés celui-ci :

Peut-on, sur le plan d'une ellipse donnée, décrire un cercle tel que les cordes interceptées par cette ellipse sur les tangentes à ce cercle soient toutes de même longueur?

Il est d'abord aisé de voir que, si le problème est possible, le cercle ne devra pas couper l'ellipse ni même lui être tangent; car alors on pourrait avoir, à la fois, des cordes d'une grandeur finie, des cordes d'une grandeur nulle et des cordes imaginaires ; ce cercle doit donc être intérieur à l'ellipse.

De plus, pour que les cordes de l'ellipse tangentes à ce cercle, menées parallèlement à un des axes de cette ellipse soient de même longueur, il est nécessaire que le centre du cercle soit sur cet axe ; ce centre doit donc être à la fois sur les deux axes de l'ellipse ; c'est-à-dire que le cercle et l'ellipse doivent être concentriques.

Cela posé, pour prouver qu'un tel cercle ne saurait exister, M. Bonetti suppose qu'ayant décrit ce cercle, on lui circonscrive un quarré; alors, observe-t-il, ou ce quarré se trouvera être inscrit à l'ellipse ou bien il ne sera pas.

Si ce quarré se trouve inscrit à l'ellipse, le cercle ne pourra satisfaire aux conditions du problème. En effet, il est connu que le cercle inscrit au quarré, qui est lui-même inscrit à une ellipse, et dont les côtés sont parallèles à ses axes, est aussi inscrit au parallélogramme dont les sommets coïncident avec les sommets de l'ellipse ; or, les côtés de ce parallélogramme sont $\sqrt{a^2+b^2}$, ou bien $\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, tandis que les côtés du quarré sont $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; a et b étant les demi-axes. Or, on a $a^2+b^2>2ab$; d'où l'on voit que, dans ce cas, les cordes de l'ellipse, tangentes au cercle, ne seraient pas toutes de même longueur.

Il faudra donc, s'il existe un tel cercle, qu'en lui circonscrivant un quarré, ayant ses côtés parallèles aux axes de l'ellipse, ses sommets soient tous intérieurs ou tous extérieurs à cette ellipse qui coupera conséquemment chacun de ses côtés ou leurs prolongemens en deux points; or, il est visible que, pour que les quatre cordes qui correspondent à ces côtés fussent de même longueur, il faudrait que les huit points d'intersection de l'ellipse, avec les directions des côtés du quarré, fussent également distans de son centre, et conséquemment sur une même circonférence qui couperait ainsi l'ellipse en huit points; tandis que deux sections coniques ne sauraient avoir plus de quatre points communs.

Pour prouver l'impossibilité du problème, M. Vallès remarque qu'en désignant par r le rayon du cercle, sa tangente au point (x',y') a pour équation

$$x'x+y'y=r^2\ ,$$

sous la condition

$$x'^2+y'^2=r^2\ ,$$

et qu'en combinant l'équation de cette tangente avec celle de l'ellipse que nous supposons être

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\ ,$$

on trouve, pour la longueur de la corde interceptée par l'ellipse,

$$\frac{2abr\sqrt{a^2x'^2+b^2y'^2-r^4}}{a^2x'^2+b^2y'^2}\ ;$$

or, pour que cette corde soit constante, il est nécessaire et il suffit que $a^2x'^2+b^2y'^2$ soit une quantité constante, quels que soient x' et y' ; ce qui assujétirait le point (x',y') à être l'un des points d'une certaine ellipse; mais ce point (x',y') doit être à la circonférence d'un cercle, laquelle ne saurait se confondre avec cette ellipse qu'autant qu'on aurait $a=b$; c'est-à-dire, qu'autant que l'ellipse donnée serait elle-même un cercle.