ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

LE BARBIER

Hydrodynamique. Solution d'un problème d'hydrodynamique

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 175-183

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__175_1>

HYDRODYNAMIQUE.

Solution d'un problème d'hydrodynamique ;

Par M. Le Barbier.

PROBLÈME. *Un vase, dont la surface intérieure est de révolution, autour d'un axe vertical, contient un liquide pesant, homogène et incompressible, dans lequel flotte un solide pesant, dont la surface est également de révolution, autour d'un axe vertical, contenant son centre de gravité, et coïncidant avec l'axe du vase. On suppose qu'après avoir contraint le corps flottant à s'enfoncer verticalement, d'une quantité déterminée, au-dessous de sa situation naturelle d'équilibre, sans que, néanmoins, il soit totalement submergé, on l'abandonne subitement à lui-même ; et* *on demande quelles seront alors les lois de son mouvement vertical, abstraction faite de la résistance du liquide* (*) ?

Solution. En coupant le vase à une distance quelconque z d'un point fixe de son axe, par un plan horizontal, on obtiendra une section circulaire dont le rayon R sera une fonction de z; la surface de cette section sera ϖR^2, et l'élément de la capacité du vase $\varpi R^2 dz$; de sorte que la portion de cette capacité, comprise entre deux plans horizontaux quelconques, sera égale à l'intégrale $\varpi\int R^2 dz$ prise entre ces mêmes plans.

En coupant le corps flottant à une distance quelconque z d'un point fixe de son axe, par un plan horizontal, on obtiendra une section circulaire, dont le rayon r sera une fonction de z; la surface de cette section sera ϖr^2, et l'élément du volume du corps flottant $\varpi r^2 dz$; de sorte que la portion de ce volume, comprise entre deux plans horizontaux quelconques, sera égale à l'intégrale $\varpi\int r^2 dz$ prise entre ces mêmes plans.

Prenons, pour point de départ des z, tant pour le vase que pour le corps flottant, le point où leur axe commun est coupé par le plan de la surface supérieure du liquide, dans l'état naturel d'équilibre, et supposons qu'à l'époque quelconque t, le corps flottant se trouve abaissé au-dessous de cette situation d'une quantité x. Soit X l'élévation correspondante du liquide dans le vase, au-dessus de son niveau primitif; x et X seront deux fonctions de la variable t, et néanmoins il devra y avoir entre ces deux quantités une relation indépendante de cette variable et résultant uniquement de l'incompressibilité du liquide et de l'impénétrabilité de la matière. Cherchons d'abord cette relation.

A l'époque t, la portion du volume du corps flottant passée au-

(*) M. Le Barbier signale ce problème comme ayant été proposé dans les *Annales*, nous n'avons pu découvrir en quel endroit.

J. D. G.

dessous du plan de niveau primitif du liquide sera évidemment $\varpi\int_x^0 r^2 dz$. A la même époque, le volume de liquide, parvenu au-dessus de ce même plan, sera $\varpi\int_X^0 R^2 dz - \varpi\int_{x+X}^x r^2 dz$. Or, ces deux volumes doivent visiblement être égaux; on aura donc, en divisant par ϖ

$$\int_X^0 R^2 dz - \int_{x+X}^x r^2 dz = \int_x^0 r^2 dz .$$

En remarquant d'ailleurs que

$$\int_{x+X}^x r^2 dz = \int_{x+X}^0 r^2 dz - \int_x^0 r^2 dz ,$$

cette équation se réduira simplement à

$$\int_X^0 R^2 dz = \int_{x+X}^0 r^2 dz , \qquad (1)$$

et telle est l'équation dont l'intégration donnera, dans chaque cas particulier, la relation demandée entre les deux variables x et X.

Cherchons présentement l'équation du mouvement vertical du corps flottant, et, pour cela, calculons la force accélératrice pour l'époque t. Soit V le volume de la partie submergée du corps flottant, dans l'état primitif d'équilibre de ce corps; V sera aussi le volume du liquide déplacé à la même époque; de sorte qu'en désignant par δ la densité du liquide, δV sera la masse du liquide déplacé, dans l'état primitif d'équilibre. En représentant donc, à l'ordinaire, par g la gravité, le poids du liquide déplacé sera $g\delta V$. Mais, en représentant par M la masse du corps flottant, son poids sera gM; on devra donc avoir suivant les lois de l'hydrostatique, et en divisant par g,

$$\delta V = M .$$

A l'époque t, le volume du liquide déplacé sera augmenté de $\varpi\int_{x+X}^0 r^2 dz$, de sorte que ce volume sera alors

$$V+\varpi\int_{x+X}^{0} r^2\mathrm{d}z\ ,$$

le poids du liquide déplacé, c'est-à-dire l'action verticale de bas en haut sera donc

$$g\delta\left(V+\varpi\int_{x+X}^{0} r^2\mathrm{d}z\right)\ ;$$

mais l'action verticale de haut en bas sera égale au poids du corps flottant, c'est-à-dire, à gM ; on aura donc

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=gM-g\delta\left(V+\varpi\int_{x+X}^{0} r^2\mathrm{d}z\right)\ ;$$

ou simplement, en ayant égard à la relation ci-dessus entre M et V

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\varpi g\delta\int_{x+X}^{0} r^2\mathrm{d}z\ ;$$

ou bien encore (1)

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\varpi g\delta\int_{X}^{0} R^2\mathrm{d}z\ ; \qquad (2)$$

équation qui ne renfermera plus que les deux variables x et t, lorsqu'on en aura chassé X, au moyen de l'équation (1).

Il est remarquable que ces deux équations ne renferment plus aucune trace ni du volume de la partie submergée du corps flottant dans l'état primitif d'équilibre, ni de sa masse, de sorte que les lois du mouvement de ce corps seront tout à fait indépendantes de ces deux élémens. On pourra même supposer que sa partie inférieure, ainsi que celle du vase ont une figure quelconque; il suffira seulement que la partie de la surface de l'un et de l'autre, baignée par la surface supérieure du liquide, soit, dans toutes les situations de cette surface, une surface de révolution.

Pour appliquer ces formules générales à un exemple simple, supposons que la surface du vase et celle du corps flottant soient l'une et l'autre cylindriques, alors R et r, rayons respectifs des cylindres, seront des quantités constantes; au moyen de quoi les équations (1) et (2) deviendront

$$R^2\int_X^0 \mathrm{d}z = r^2\int_{x+X}^0 \mathrm{d}z\ , \qquad (3)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\varpi g\delta R^2\int_X^0 \mathrm{d}z\ ; \qquad (4)$$

ce qui donnera, en intégrant,

$$R^2X = r^2(x+X)\ , \qquad (5)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\varpi g\delta R^2X\ . \qquad (6)$$

L'équation (5) donne

$$X = \frac{r^2x}{R^2-r^2}\ , \qquad (7)$$

valeur qui, substituée dans l'équation (6), la change en celle-ci

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\varpi g\delta R^2r^2}{R^2-r^2}x\ ; \qquad (8)$$

la force accélératrice, nulle en même temps que x, est donc simplement proportionnelle à la distance verticale du corps flottant à sa situation primitive d'équilibre ; elle est aussi proportionnelle à la densité du liquide ; et elle est d'autant plus grande, toutes choses égales d'ailleurs, que le rayon du vase et celui du corps flottant sont moins inégaux. On voit aussi qu'aux mêmes distances du corps flottant, au-dessus et au-dessous de sa situation primitive d'équilibre, les forces accélératrices ne doivent différer que par le signe.

En multipliant par $2\mathrm{d}x$ les deux membres de l'équation (8) et intégrant, elle devient

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = v^2 = \frac{\varpi g\delta R^2r^2}{R^2-r^2}(a^2-x^2)\ ; \qquad (9)$$

a étant la constante arbitraire. Cette expression du quarré de la vîtesse devient nulle pour $x=a$; mais la vîtesse est nulle aussi au moment où on abandonne le corps flottant à lui-même; donc la constante a est précisément la quantité dont ce corps flottant était alors enfoncé verticalement au-dessous de sa situation primitive d'équilibre; et comme la vîtesse est également nulle, lorsqu'on fait $x=-a$, il s'ensuit que le corps flottant s'élevera précisément au-dessus de sa situation primitive d'équilibre, de la même quantité dont on l'avait d'abord enfoncé au-dessous. De plus, comme la même valeur absolue de x, quel qu'en soit le signe, donne toujours la même valeur pour v^2, il s'ensuit que les vîtesses du corps flottant, à même distance au-dessus et au-dessous de sa situation primitive d'équilibre, ne différeront au plus que par le signe. On pourra d'ailleurs rendre cette vîtesse indéfiniment grande, en rendant la différence des rayons R et r de plus en plus petite; ce qui s'accorde parfaitement avec l'effet énergique de la presse hydraulique et avec le paradoxe hydrostatique de Pascal.

On voit enfin que la vîtesse du corps flottant sera la plus grande possible lorsqu'on aura $x=0$, c'est-à-dire, lorsqu'il parviendra à sa situation primitive d'équilibre. En désignant donc par w cette plus grande vîtesse, on aura

$$w^2=\frac{\varpi g\delta R^2r^2}{R^2-r^2}a^2\ ; \qquad (10)$$

au moyen de quoi l'équation (9) deviendra simplement

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=v^2=\frac{w^2}{a^2}(a^2-x^2). \qquad (11)$$

On tire de là

$$w\mathrm{d}t=\frac{a\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ , \qquad (12)$$

et ensuite en intégrant et comptant les temps de l'époque où le corps flottant est abandonné à lui-même et où conséquemment $x=a$,

$$wt=-a\mathrm{Arc}\left(\mathrm{Cos.}=\frac{x}{a}\right)\ ; \qquad (13)$$

et, par suite,

$$x=a\text{Cos.}\,\frac{wt}{a}\,. \qquad (14)$$

En donnant à t les valeurs, en progression par différences,

$$\frac{4n\varpi a}{2w}\,,\quad \frac{(4n+1)\varpi a}{2w}\,,\quad \frac{(4n+2)\varpi a}{2w}\,,\quad \frac{(4n+3)\varpi a}{2w}\,,$$

où n est un nombre entier quelconque ; on obtiendra pour x les valeurs

$$+a\,,\quad \pm 0\,,\quad -a\,,\quad \mp 0\,;$$

ainsi, non seulement les oscillations seront périodiques, mais chaque oscillation complète se trouvera divisée en quatre temps égaux durant lesquels le corps flottant passera successivement de sa situation la plus basse à sa situation primitive d'équilibre, de celle-ci à la plus élevée, de cette dernière à la précédente et enfin de celle-ci à la plus basse. On voit d'ailleurs (10) que ces intervalles de temps seront d'autant plus courts que la densité du liquide sera plus grande et les rayons des deux cylindres moins inégaux.

En substituant pour x sa valeur (13) dans les formules (8) et (11), il viendra, en ayant égard à la relation (10),

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{w^2}{a}\,\text{Cos.}\,\frac{wt}{a}\,;\qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v=w\text{Sin.}\,\frac{wt}{a}\,; \qquad (15)$$

telles sont donc la force accélératrice et la vîtesse en fonction du temps.

Veut-on connaître les lois du mouvement vertical de la surface supérieure du liquide ? En substituant dans la formule (7) la valeur (13) de x, on trouvera

$$X=\frac{ar^2}{R^2-r^2}\,\text{Cos.}\,\frac{wt}{a}\,; \qquad (16)$$

d'où on conclura, par deux différentiations,

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=-\frac{r^2w}{R^2-r^2}\,\text{Sin.}\,\frac{wt}{a}\,,\qquad \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{r^2w^2}{a(R^2-r^2)}\,\text{Cos.}\,\frac{wt}{a}\,; \qquad (17)$$

telles sont donc la vîtesse et la force accélératrice de la surface supérieure du liquide.

S'il s'agissait d'un cylindre flottant dans un liquide indéfini, cela reviendrait à supposer R infini, on aurait alors (10)

$$\psi^2 = \varpi g \delta r^2 a^2 \; ; \qquad (18)$$

cela donnerait d'abord

$$X=0 \; , \quad \frac{dX}{dt}=0 \; , \quad \frac{d^2X}{dt^2}=0 \; ;$$

c'est-à-dire que la hauteur du liquide demeurerait constante. On trouverait ensuite, au moyen de la relation (17),

$$x = a\,\text{Cos}.rt\sqrt{\varpi g \delta} \; , \qquad (19)$$

$$\frac{dx}{dt} = v = -ar\sqrt{\varpi g \delta}\,\text{Sin}.rt\sqrt{\varpi g \delta} \; , \qquad (20)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varpi g \delta r^2 a\,\text{Cos}.rt\sqrt{\varpi g \delta} \; ; \qquad (21)$$

on aura ainsi $x=a$, toutes les fois qu'on aura

$$\text{Cos}.rt\sqrt{\varpi g \delta}=1 \; , \qquad \text{ou} \qquad rt\sqrt{\varpi g \delta}=2n\varpi \; ;$$

d'où

$$t=\frac{2n}{r}\sqrt{\frac{\varpi}{g\delta}} \; ;$$

quantité indépendante de a; ce qui prouve que la durée des oscillations sera toujours la même, quel que soit l'enfoncement du corps flottant, qui ne fera qu'en accroître la vîtesse, propriété tout à fait analogue à l'isochronisme du mouvement dans la cycloïde.

On voit par la forme des équations (1) et (2) que, quelles que soient les courbes génératrices données tant de la surface du vase que de celle du corps flottant, on pourra toujours en conclure la nature du mouvement de ce dernier, et que même le problème ne dépendra jamais que des quadratures. On pourrait aussi renverser la question, se donner l'une des deux surfaces et se demander quelle doit être la nature de l'autre pour que le corps flottant ait un mouvement donné ? C'est un problème sur lequel nous pourrons revenir dans une autre occasion.