ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

Statique. Démonstration du principe des vitesses virtuelles dans les machines en équilibre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 285-287
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__285_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1829-1830, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

STATIQUE.

Démonstration du principe des vîtesses virtuelles dans les machines en équilibre ;

Par M. Bobillier, chef des études à l'Ecole royale des arts et métiers d'Angers.

Soient A', A'', A''', ... et $A_{,}$, $A_{,,}$, $A_{,,,}$, ... divers points mobiles d'une machine quelconque, auxquels sont respectivement appliquées des puissances P', P'', P''', ..., et des résistances $P_{,}$, $P_{,,}$, $P_{,,,}$, ..., se faisant mutuellement équilibre. Si, par l'effet d'une cause quelconque, l'équilibre est infiniment peu troublé ; en vertu de la liaison des parties du système, les points A', A'', A''', ..., $A_{,}$, $A_{,,}$, $A_{,,,}$, ..., décriront, dans l'espace, des arcs de courbes infiniment petits $A'a'$, $A''a''$, $A'''a'''$, ... $A_{,}a_{,}$, $A_{,,}a_{,,}$, $A_{,,,}a_{,,,}$, ..., dont on pourra représenter respectivement les projections sur les directions même des puissances et des résistances, par p', p'', p''', ..., $p_{,}$, $p_{,,}$, $p_{,,,}$, ... Nous nous proposons de démontrer qu'on aura nécessairement

$$P'p'+P''p''+P'''p'''+\ldots\ldots=P_{,}p_{,}+P_{,,}p_{,,}+P_{,,,}p_{,,,}+\ldots\ldots$$

Pour y parvenir, substituons à la machine, qui est quelconque, et dont la nature peut être variée d'une infinité de manières différentes, un appareil simple, dans lequel les conditions d'équilibre soient bien connues, et qui, du moins pour l'écart infiniment peu que nous supposons dans l'équilibre, lui soit exactement équivalent.

Pour cela, concevons d'abord que les arcs $A'a'$, $A''a''$, $A'''a'''$, ..., $A_{/}a_{/}$, $A_{//}a_{//}$, $A_{///}a_{///}$, ... que les points d'application des puissances et des résistances tendent à décrire, deviennent des arcs matériels fixes, sur lesquels ces points soient, en effet, assujétis à se mouvoir, et qui n'exerçent sur eux aucun frottement. Etablissons, en outre, dans l'espace, un axe fixe, de situation arbitraire, sur lequel soient pris arbitrairement des points O', O'', O''', ..., $O_{/}$, $O_{//}$, $O_{///}$, ... Par ces points, soient conduits des plans indéfinis, perpendiculaires à l'axe fixe; et, de ces mêmes points comme centres, soient décrits des cercles sur ces plans avec des rayons

$$R'=\frac{p'}{\omega},\ R''=\frac{p''}{\omega},\ R'''=\frac{p'''}{\omega},\ldots,\ R_{/}=\frac{p_{/}}{\omega},\ R_{//}=\frac{p_{//}}{\omega},\ R_{///}=\frac{p_{///}}{\omega},\ldots$$

ω étant un angle infiniment petit. Soient M', M'', M''', ..., $M_{/}$, $M_{//}$, $M_{///}$, ... les points où les plans de ces cercles sont respectivement percés par les directions des puissances P', P'', P''', ... et des résistances $P_{/}$, $P_{//}$, $P_{///}$, ... Concevons, en ces différens points, des anneaux infiniment petits, fixes dans l'espace, dans lesquels des fils puissent glisser sans frottement. Concevons, en effet, de tels fils, dont une extrémité soit liée à chacun des points A', A'', A''', ..., $A_{/}$, $A_{//}$, $A_{///}$, ..., et qui, après avoir passé dans les anneaux M', M'', M''', ..., $M_{/}$, $M_{//}$, $M_{///}$, ... aillent s'enrouler sur les cercles dont les rayons sont R', R'', R''', ..., $R_{/}$, $R_{//}$, $R_{///}$, ..., et que nous sopposons invariablement liés à leur axe commun. Supposons enfin qu'on ait eu le soin de choisir celle des deux directions tangentes à ces cercles que peuvent prendre ces fils, à partir des points M', M'', M''', ..., $M_{/}$, $M_{//}$, $M_{///}$, ..., de telle sorte qu'en faisant tourner leur système autour de l'axe, dans un sens ou dans un autre, les fils qui se terminent aux points d'applieation des puissances et ceux qui se terminent aux points d'application des résistances marchent en sens inverses les uns des autres; c'est-à-dire, de telle sorte que les uns se déroulent tandis que les autres s'enrouleront, et *vice versâ*.

Si l'on suppose ces fils parfaitement flexibles, incompressibles et inextensibles, il est clair que les puissances P', P'', P''', ..., et les résistances $P_{/}$, $P_{//}$, $P_{///}$, ... exprimeront leurs tensions respectives. Il est de plus manifeste qu'en faisant tourner le treuil composé de tous les cercles, autour de leur axe commun, de la quantité angulaire infiniment petite ω, tout se passera exactement comme dans la machine proposée, quelle qu'elle puisse être; de sorte que ce treuil pourra être considéré comme le parfait équivalent de cette machine, du moins tant qu'elle ne devra s'écarter qu'infiniment peu de l'état d'équilibre.

Mais, pour l'équilibre de ce treuil, il faudra qu'on ait

$$P'R'+P''R''+P'''R'''+\ldots\ldots=P_{/}R_{/}+P_{//}R_{//}+P_{///}R_{///}+\ldots\ldots\ ;$$

mettant donc dans cette équation pour R', R'', R''', ..., $R_{/}$, $R_{//}$, $R_{///}$, ..., les valeurs que nous leur avons assignées ci-dessus, et supprimant ensuite le dénominateur commun ω; il viendra pour la condition d'équilibre de la machine

$$P'p'+P''p''+P'''p'''+\ldots\ldots=P_{/}p_{/}+P_{//}p_{//}+P_{///}p_{///}+\ldots\ldots\ ,$$

comme nous l'avions annoncé.