ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

Géométrie élémentaire. Note sur la mesure du volume du tronc de pyramide

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 288-292
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__288_0>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Note sur la mesure du volume du tronc de pyramide;

Par un ABONNÉ.

Au Rédacteur des *Annales;*

MONSIEUR,

En examinant avec attention la plupart des Traités de géométrie élémentaire, il semble souvent que leurs auteurs aient pris à tâche de rendre, à dessein, difficile une étude qu'ils auraient dû s'efforcer, au contraire, de mettre à la portée du plus grand nombre. Indépendamment de ces continuelles réductions à l'absurde, dont on pourrait, tout au plus, donner un ou deux exemples en notes, par forme d'échantillon, et dont le moindre inconvénient est, comme vous l'avez fort bien observé vous-même (*Annales*, tom. V, pag. 183), de faire perdre tout à fait de vue la marche des inventeurs, dans l'investigation des vérités inconnues; combien n'est-il pas d'autres parties des élémens qui pourraient être traitées d'une manière beaucoup plus naturelle et en même temps beaucoup plus simple? On dit, en faveur de la pratique contraire, qu'elle est plus propre à développer et à exercer l'intelligence des commençans; mais c'est là, ce me semble, une erreur manifeste; et cette pratique ne me paraît propre qu'à faire briller l'adresse des auteurs qui devraient, au contraire, dans la composition de leurs ouvrages, s'oublier constamment, pour ne songer qu'à ceux qu'ils ont dessein d'instruire. Ce qui peut réellement développer et exercer l'intelligence des élèves, ce sont des théorèmes et des problèmes que, par forme d'exercice, on leur donne à démontrer et à résoudre, *proprio marte*. Leur application à retenir exactement des raisonnemens et des procédés qu'ils trouvent dans un livre n'exerce uniquement que leur mémoire. Ne vaudrait-il pas beaucoup mieux, d'ailleurs, leur présenter simplement ce qui est simple de sa nature, et réserver les forces de leur intelligence pour beaucoup d'importantes recherches qu'on ne fait point d'ordinaire figurer dans les élémens, et qui néanmoins devraient y trouver place, parce qu'elles sont, pour la plupart, fondamentales dans la science.

Pour donner un exemple, entre beaucoup d'autres, des choses que l'on pourrait facilement abréger et simplifier dans nos traités de géométrie, je citerai la mesure du volume du tronc de pyramide ou de cône à bases parallèles. Dans l'ouvrage de M. Legendre et dans plusieurs autres, on cherche d'abord le volume d'un tronc de tétraèdre ; ce qui exige une décomposition ingénieuse, si l'on veut, mais qui peut très-facilement échapper de la mémoire. Il faut d'ailleurs s'appuyer sur un lemme qui doit avoir été démontré auparavant, et qui n'est guère utile qu'en cette rencontre, et faire ensuite une combinaison de proportions dans laquelle Lagrange lui-même, surtout en présence d'un examinateur tant soit peu impatient, comme on peut fort bien en rencontrer par fois, aurait fort bien pu s'égarer, sans en être pour cela moins excellent géomètre. Alors tout n'est point fait encore; il faut prouver que ce qui est vrai pour le tronc de tétraèdre l'est aussi pour le tronc d'une pyramide quelconque; et faire voir finalement, par une réduction à l'absurde, que la proposition subsiste encore pour le tronc d'un cône droit ou oblique. Examinons si quelque autre voie ne serait pas, à la fois, plus simple et plus naturelle.

Dès qu'on sait mesurer le volume soit d'une pyramide entière, soit d'un cône entier, ce qui s'offre naturellement à la pensée pour parvenir à l'évaluation du volume d'un tronc de pyramide, à bases parallèles ou non parallèles, est bien certainement de déterminer d'abord le volume de la pyramide entière ou du cône entier, puis celui de la pyramide ou du cône retranché, et de soustraire ensuite ce second volume du premier. On conçoit d'ailleurs, à l'avance, que le parallélisme des bases pourra fort bien permettre quelques simplifications, tant dans le calcul que dans son résultat final.

Supposons donc qu'en effet les deux bases du tronc soient parallèles; soient T ce tronc, P et P' les pyramides totales et retranchées, lesquelles peuvent également être des cônes, B et B' leurs bases, h et h' leurs hauteurs respectives, et enfin k la hauteur du tronc; nous aurons d'abord

$$T=P-P'=\tfrac{1}{3}Bh-\tfrac{1}{3}B'h'=\tfrac{1}{3}(Bh-B'h') .$$

Mais on peut désirer de faire entrer dans cette expression la hauteur k du tronc et d'en faire disparaître les hauteurs h et h', incommodes à mesurer; et on voit même, sur-le-champ, que la chose est possible; car il suffit, pour cela, qu'il existe deux relations distinctes entre h, h' et les autres données du problème; or, deux telles relations existent en effet, car on a d'abord évidemment

$$h-h'=k ;$$

ensuite, comme les aires des bases sont proportionnelles aux quarrés des hauteurs, en représentant par b et b' les côtés de deux carrés respectivement équivalens aux deux bases, on aura

$$\frac{h}{h'}=\frac{b}{b'} ;$$

ce qui donnera

$$h=\frac{bk}{b-b'}\ , \qquad h'=\frac{b'k}{b-b'} \quad (*)\ ;$$

d'où, en substituant dans la valeur de T,

$$T=\tfrac{1}{3}k\,\frac{b^3-b'^3}{b-b'}=\tfrac{1}{3}k(b^2+bb'+b'^2)\ ;$$

mais on a

$$b^2=B\ , \qquad bb'=\sqrt{BB'}\ , \qquad b'^2=B'\ ;$$

donc finalement

$$T=\tfrac{1}{3}k(B+\sqrt{BB'}+B')\ ;$$

ce qui est l'expression connue. On parviendrait , par une marche analogue, et avec une bien plus grand facilité encore , à l'expression connue de la surface convexe du tronc de cône à bases parallèles.

On ne manquera pas sans doute de dire que je viens de faire de l'algèbre et non de la géométrie. Je me disculperai de ce grave reproche en faisant remarquer qu'on peut fort bien remplacer les équations dont je me suis servi par des proportions équivalentes , et mettre ensuite deux lettres partout où je n'en ai mis qu'une seule ; car c'est là, aux yeux de beaucoup de gens, le caractère constitutif de la géométrie. Il en résultera seulement un peu plus de complication dans l'écriture, et voilà tout. Il est d'ailleurs très-facile de démontrer, par la géométrie pure, que $(a^2+ab+b^2)(a-b)=a^3-b^3$.

Quel peut être d'ailleurs le motif de cette gothique et inconceva-

(*) On pourrait traiter d'une manière analogue le problème des deux bougies, que l'on a coutume de donner comme un problème du second degré.

J. D. G.

ble obstination qui fait précéder, dans nos écoles, l'étude de l'algèbre par celle de la géométrie? Outre que l'étude de la géométrie exige la connaissance de l'arithmétique, que l'on ne possède parfaitement que lorsqu'on a vu un peu d'algèbre; comment ne voit-on pas que l'algèbre n'est qu'une langue, qu'elle n'est qu'un pur instrument qu'il est fort inutile d'apprendre à manier, lorsqu'on possède déjà les connaissances dont son emploi aurait pu faciliter l'acquisition? Qu'on fasse de la géométrie à la manière de Monge et de ses disciples, sans aucune sorte de calcul; qu'on pousse cette géométrie aussi loin qu'on le pourra, j'y souscris de très-grand cœur; mais qu'on cesse enfin de nous donner pour *géométrie pure* une géométrie toute encombrée de proportions, de *componendo* et de *dividendo*, dans lesquels je ne saurais voir que des équations et des éliminations, sous un déguisement suranné.

Agréez, etc.

Lyon, le 15 d'octobre 1829.