
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

VALLÈS

Statique. Note sur la démonstration du parallélogramme des forces

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 292-296

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__292_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1829-1830, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

STATIQUE.

*Note sur la démonstration du parallélogramme
des forces ;*

Par M. VALLÈS, ingénieur des ponts et chaussées, ancien
élève de l'école polytechnique.

~~~~~

Mon cher Professeur,

A la page 81, de votre XVIII.<sup>m</sup>e volume, vous avez signalée, comme très-simple et très-élégante, une démonstration du parallélogramme des forces, publiée par M. J. KING, dans les *Transac-*

tions de la société philosophique de Cambridge ; mais, en même temps, vous avez signalé cette démonstration comme incomplète. Il m'a paru qu'elle pouvait être complétée comme il suit :

Soient deux forces  $P$ , formant entre elles un angle  $2\theta$ , et soit  $R$  leur résultante. Cette résultante devant être nulle pour toutes les valeurs et pour les seules valeurs de  $\theta$  qui rendent nuls les binômes, en nombre infini,

$$1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2}, \quad 1 - \frac{4\theta^2}{9\pi^2}, \quad 1 - \frac{4\theta^2}{25\pi^2}, \quad \dots ;$$

il s'ensuit qu'on doit avoir

$$R = kP \left(1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2}\right)^\alpha \left(1 - \frac{4\theta^2}{9\pi^2}\right)^\beta \left(1 - \frac{4\theta^2}{25\pi^2}\right)^\gamma \dots ;$$

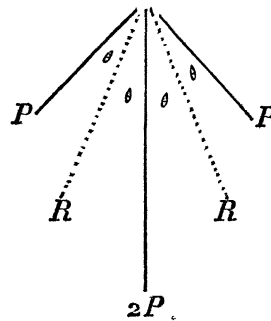
$k$  étant un coefficient indépendant de  $P$  et  $\theta$ , et  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  des exposans positifs.

D'abord, comme en faisant  $\theta = 0$ , on doit avoir  $R = 2P$ , il s'ensuit que, quel que soit  $\theta$ , on doit avoir  $k = 2$ , et conséquemment

$$R = 2P \left(1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2}\right)^\alpha \left(1 - \frac{4\theta^2}{9\pi^2}\right)^\beta \left(1 - \frac{4\theta^2}{25\pi^2}\right)^\gamma \dots ; \quad (1)$$

reste donc à déterminer les exposans  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Pour y parvenir, considérons trois forces  $P, P$  et  $2P$ , concourant en un même point ; les deux premières formant entre elles un angle  $4\theta$ , et la troisième divisant en deux parties égales l'angle de ces deux-là, ainsi qu'on le voit ici :



Pour avoir la résultante de ces trois forces, on pourra indifféremment ajouter à la force intermédiaire  $2P$  la résultante des deux forces extrêmes, ou bien composer, tour à tour, chaque moitié de la force  $2P$  avec l'une des forces extrêmes, pour avoir deux résultantes partielles égales à  $R$ , et composer ensuite ces deux résultantes en une seule force.

En procédant de la première de ces deux manières, on aura, pour la résultante des deux forces extrêmes, en vertu de la formule (1),

$$2P \left(1 - \frac{16\theta^2}{\pi^2}\right)^\alpha \left(1 - \frac{16\theta^2}{9\pi^2}\right)^\beta \left(1 - \frac{16\theta^2}{25\pi^2}\right)^\gamma \dots ;$$

de sorte que la résultante totale des trois forces sera

$$2P + 2P \left(1 - \frac{16\theta^2}{\pi^2}\right)^\alpha \left(1 - \frac{16\theta^2}{9\pi^2}\right)^\beta \left(1 - \frac{16\theta^2}{25\pi^2}\right)^\gamma \dots \quad (2)$$

En procédant de la seconde manière on aura, pour chacune des résultantes partielles  $R$ ,

$$R = 2P \left(1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2}\right)^\alpha \left(1 - \frac{4\theta^2}{9\pi^2}\right)^\beta \left(1 - \frac{4\theta^2}{25\pi^2}\right)^\gamma \dots ,$$

et, pour la résultante générale,

$$2R \left(1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2}\right)^\alpha \left(1 - \frac{4\theta^2}{9\pi^2}\right)^\beta \left(1 - \frac{4\theta^2}{25\pi^2}\right)^\gamma \dots ;$$

ou bien, en remettant pour  $R$  sa valeur,

$$4P \left(1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2}\right)^{2\alpha} \left(1 - \frac{4\theta^2}{9\pi^2}\right)^{2\beta} \left(1 - \frac{4\theta^2}{25\pi^2}\right)^{2\gamma} \dots \quad (3)$$

Les expressions (2) et (3) devront donc être identiquement les mêmes, quel que soit  $\theta$ ; ce qui donnera, en les égalant et en divisant par  $2P$ ,

$$\left. \begin{aligned} 1 + \left(1 - \frac{16\theta^2}{\pi^2}\right)^\alpha \left(1 - \frac{16\theta^2}{9\pi^2}\right)^\beta \left(1 - \frac{16\theta^2}{25\pi^2}\right)^\gamma \dots \\ = 2 \left(1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2}\right)^{2\alpha} \left(1 - \frac{4\theta^2}{9\pi^2}\right)^{2\beta} \left(1 - \frac{4\theta^2}{25\pi^2}\right)^{2\gamma} \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Or, on sait que (\*)

$$\begin{aligned} \text{Cos. } 2\theta &= \left(1 - \frac{16\theta^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{16\theta^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{16\theta^2}{25\pi^2}\right) \dots, \\ \text{Cos. }^2\theta &= \left(1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2}\right)^2 \left(1 - \frac{4\theta^2}{9\pi^2}\right)^2 \left(1 - \frac{4\theta^2}{25\pi^2}\right)^2 \dots; \end{aligned}$$

au moyen de quoi l'équation (4) se change en celle-ci :

$$\left. \begin{aligned} 1 + \text{Cos. } 2\theta \cdot \left(1 - \frac{16\theta^2}{\pi^2}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{16\theta^2}{9\pi^2}\right)^{\beta-1} \left(1 - \frac{16\theta^2}{25\pi^2}\right)^{\gamma-1} \dots \\ = 2 \text{Cos. }^2\theta \cdot \left(1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2}\right)^{2(\alpha-1)} \left(1 - \frac{4\theta^2}{9\pi^2}\right)^{2(\beta-1)} \left(1 - \frac{4\theta^2}{25\pi^2}\right)^{2(\gamma-1)} \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

---

(\*) *Annales*, tom. I.<sup>er</sup>, pag. 120.

Cela posé, soit fait  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , il en résultera

$$2\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2\theta}{\pi} = \frac{1}{2}, \quad \text{Cos. } 2\theta = 0, \quad 2\text{Cos. }^2\theta = 1;$$

en conséquence l'équation (5) deviendra

$$1 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{2(\alpha-1)} \left(1 - \frac{1}{4 \cdot 9}\right)^{2(\beta-1)} \left(1 - \frac{1}{4 \cdot 25}\right)^{2(\gamma-1)} \dots;$$

or, comme les facteurs

$$1 - \frac{1}{4}, \quad 1 - \frac{1}{4 \cdot 9}, \quad 1 - \frac{1}{4 \cdot 25}, \dots$$

sont tous moindres que l'unité, cette équation ne saurait subsister qu'autant qu'on aura

$$\alpha = \beta = \gamma = \dots = 1;$$

donc on a simplement (1)

$$R = 2P \left(1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4\theta^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4\theta^2}{25\pi^2}\right) \dots;$$

c'est-à-dire,

$$R = 2P \text{Cos. } \theta,$$

comme il s'agissait de le prouver.