ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

THÉODORE DALLARI

Questions résolues. Solution du problème d'hydrostatique énoncé à la pag. 316 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 31-34

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__31_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème d'hydrostatique énoncé à la pag. 316 du présent volume ;

Par M. Théodore Dallari, cadet au corps royal des Pionniers, à Modène.

Problème. On suppose qu'il n'existe rien autre chose, dans l'univers, qu'une masse de fluide élastique, dont les molécules s'at-

tirent en raison composée de la directe de la masse de la molécule attirante et de l'inverse du quarré de sa distance à la molécule attirée ; on suppose, en outre, que ce fluide se comprime proportionnellement aux pressions qu'il éprouve ; on suppose enfin que ses couches de densité uniforme sont sphériques et concentriques, et l'on demande suivant quelle fonction de leur rayon doit varier la densité de ces couches, pour que toute la masse fluide soit en équilibre ?

Solution. Rapportons la masse fluide à trois axes rectangulaires. Soit (x', y', z') le lieu d'une molécule quelconque attirée par une autre molécule, également quelconque, située en (x, y, z), et dont la densité est δ. La force qui sollicite la molécule située en (x', y', z') est

$$\frac{k\delta}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

k étant une constante. En représentant par X, Y, Z les composantes de cette force, respectivement parallèles aux trois axes, nous aurons

$$X=-\frac{k\delta(x-x')}{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$Y=-\frac{k\delta(y-y')}{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$Z=-\frac{k\delta(z-z')}{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation

$$\mathrm{d}p=X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z$$

des fluides en équilibre, il viendra

$$\mathrm{d}p = -\frac{k\delta\{(x-x')\mathrm{d}x+(y-y')\mathrm{d}y+(z-z')\mathrm{d}z\}}{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}}. \quad (1)$$

Mais

$$(x-x')\mathrm{d}x+(y-y')\mathrm{d}y+(z-z')\mathrm{d}z=0$$

doit représenter la différentielle d'une surface quelconque de niveau, ou de l'une des surfaces sphériques concentriques de densité uniforme, ce qui donne x', y', z' constantes. Transportant donc l'origine au point (x', y', z') ou, en d'autres termes, posant $x'=y'=z'=0$, l'équation (1) deviendra

$$\mathrm{d}p = -\frac{k\delta(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou, en désignant par r le rayon variable des couches de densité uniforme,

$$\mathrm{d}p = -\frac{k\delta.r\mathrm{d}r}{r^3} = -\frac{k\delta.\mathrm{d}r}{r^2}; \quad (2)$$

Par la condition du problème, qui rend la densité δ proportionnelle à la pression, on a $p=h\delta$, h étant une nouvelle constante; il en résulte $\mathrm{d}p=h\mathrm{d}\delta$; d'où, en substituant dans l'équation (2),

$$h\mathrm{d}\delta = -\frac{k\delta\mathrm{d}r}{r^2}, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad h\frac{\mathrm{d}\delta}{\delta} = -k\frac{\mathrm{d}r}{r^2};$$

d'où, en intégrant

$$h\mathrm{Log.}\frac{\delta}{A} = \frac{k}{r};$$

et par suite

$$\delta = Ae^{\frac{k}{hr}}, \qquad (3)$$

A étant une constante arbitraire que l'on voit être la valeur de δ qui répond à $r = \infty$.