
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

CRELLE

Arithmétique. Démonstration d'une propriété des nombres

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 349-352

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__349_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1829-1830, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ARITHMÉTIQUE.

Démonstration d'une propriété des nombres ;

Extraite du *Journal* de M. CRELLE.

~~~~~

À la pag. 296, du V.<sup>m</sup><sup>e</sup> volume de son *Journal*, M. Crelle démontre le théorème suivant.

**THÉORÈME.** *Un nombre donné quelconque est toujours diviseur d'un autre nombre exprimé par des périodes de chiffres donnés, suivies d'un certain nombre de zéros.*

Soit, par exemple, la période donnée 4813; il n'est absolument aucun nombre qui ne soit diviseur d'un nombre de la forme

$$48134813\dots481348130000\dots0000,$$

pourvu qu'on y varie, d'une manière convenable, et le nombre des périodes et le nombre des zéros.

En particulier, le nombre des zéros pourra être quelconque si le diviseur, dont il s'agit, est premier à dix; il en sera de même du nombre des périodes, si ce diviseur est diviseur d'une puissance de dix; dans tous les autres cas, le nombre tant des périodes que des zéros aura un *minimum* au-dessous duquel il ne devra pas tomber.

La démonstration de ce théorème que donne M. Crelle, à l'endroit cité, revient, pour le fond, à ce qui suit :

*Démonstration.* Il est connu qu'en divisant les puissances successives 1,  $a$ ,  $a^2$ ,  $a^3$ ,  $a^4$ , ... d'un nombre quelconque  $a$  par un diviseur quelconque  $\delta$ , les restes successifs, lesquels ne sauraient

être de plus de  $\delta$  sortes, sont immédiatement périodiques, ou du moins le deviennent, passé un certain terme, suivant que  $\delta$  est ou n'est pas premier à  $a$ .

Soit  $a^{m+1}$  la puissance de  $a$  qui donne le premier reste de la période et  $n$  le nombre de ses termes  $< \delta$ ; et représentons par

$$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$$

les restes correspondant respectivement à

$$a^{m+1}, a^{m+2}, a^{m+3}, \dots, a^{m+n};$$

il s'ensuivra qu'en divisant

$$a^{m+1} + a^{m+2} + a^{m+3} + \dots + a^{m+n},$$

par  $\delta$ , on aura le même reste qu'en divisant

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n$$

par ce diviseur. Désignons par  $\rho$  ce reste; à cause de la périodicité, ce sera aussi le reste qu'on obtiendra en divisant par  $\delta$  la somme

$$a^{m+n+1} + a^{m+n+2} + a^{m+n+3} + \dots + a^{m+2n}$$

puis celle-ci:

$$a^{m+2n+1} + a^{m+2n+2} + a^{m+2n+3} + \dots + a^{m+3n},$$

et ainsi de suite.

Donc aussi, en divisant par  $\delta$  la somme de puissances

$$a^{m+1} + a^{m+2} + \dots + a^{m+n} + a^{m+n+1} + a^{m+n+2} + \dots + a^{m+2n} + a^{m+2n+1} + \dots + a^{m+kn},$$

on obtiendra le même reste qu'en divisant  $k\rho$  par ce diviseur ; donc, quand bien même  $\delta$  serait premier avec  $\rho$ , en prenant  $k = \delta$  on aurait là une somme de puissances consécutives exactement divisible par  $\delta$  ; on a donc ce théorème :

*Il y a toujours une somme de puissances consécutives d'un nombre donné quelconque, exactement divisible par un diviseur quelconque.*

Soit  $p$  le nombre des puissances dont se compose cette somme, de manière que

$$a^{m+1} + a^{m+2} + a^{m+3} + \dots + a^{m+p-2} + a^{m+p-1} + a^{m+p},$$

soit divisible par  $\delta$  ; il en sera évidemment de même de

$$b(a^{m+1} + a^{m+2} + a^{m+3} + \dots + a^{m+p-2} + a^{m+p-1} + a^{m+p}),$$

quel que soit  $b$  ; or, c'est là la somme de  $p$  termes consécutifs d'une progression quelconque par quotiens ; donc

*Dans une progression donnée, par quotiens, quelle qu'elle soit, on peut toujours choisir des termes consécutifs en nombre tel que leur somme soit exactement divisible par un diviseur donné quelconque.*

Soit  $b$  un nombre de  $n$  chiffres au plus et soit  $a = 10^n$ , cette somme de termes deviendra

$$b\{1 + 10^n + 10^{2n} + 10^{3n} + \dots + 10^{n(p-1)}\} 10^{(m+1)n};$$

or, c'est là précisément un nombre formé de  $p-1$  périodes égales à  $b$ , suivies de  $n(m+1)$  zéros ; ce nombre est donc divisible par  $\delta$  ; le théorème se trouve donc démontré.

Si l'on suppose, en particulier,  $n=1$ , on aura cet autre théorème :

*Tout nombre est diviseur d'un nombre exprimé par un chiffre*

352      EXPRESSIONS ALGÈBRIQUES

*significatif donné, écrit un certain nombre de fois et suivi d'un certain nombre de zéros.*

Le théorème démontré à la pag. 304 n'est, comme l'on voit, qu'un cas particulier de ce dernier, qui n'est, à son tour, qu'un cas particulier de celui de M. Crelle.

---