ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

LE BARBIER

Arithmétique. Note sur la recherche des logarithmes des grands nombres

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 366-371
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__366_1>

ARITHMÉTIQUE.

Note sur la recherche des logarithmes des grands nombres ;

Par M. Le Barbier.

Dans les tables logarithmiques dont on fait communément usage, les logarithmes sont calculés avec une approximation telle que les différences des logarithmes consécutifs sont sensiblement constantes, ce qui permet d'obtenir les logarithmes des grands nombres, avec le même degré d'approximation, par le simple emploi des parties proportionnelles.

Mais il n'en est plus ainsi lorsqu'on a besoin de calculer les logarithmes avec un grand nombre de décimales ; les tables qui donnent ces sortes de logarithmes ne sont pas poussées assez loin pour que les différences consécutives y soient constantes ; il faut donc alors, dans les interpolations faire usage des divers ordres de différences, ce qui doit nécessairement entraîner des longueurs et une complication qu'on peut désirer d'éviter. Tel est aussi le but que nous nous proposons dans la note qu'on va lire.

Soit A un nombre entier de $n+1$ chiffres, excédant les limites des tables, et dont on se propose d'obtenir le logarithme avec le même degré d'approximation qu'offrent ces tables. On sait que d'abord la caractéristique de ce logarithme sera n, et que sa partie décimale sera la même que celle du logarithme de $\frac{A}{10^n}$; tout se réduit donc à calculer la partie décimale du logarithme de ce dernier nombre.

Soit développée la fraction $\frac{A}{10^n}$ en fraction continue; soient calculées les réduites successives qui naissent de son développement, jusqu'à celle dont le numérateur excédera les limites des tables exclusivement; soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ les deux qui la précèdent immédiatement; on cherchera les logarithmes de ces deux fractions, auxquels on donnera n pour caractéristique; et tous les chiffres décimaux communs à ces deux logarithmes pourront être admis comme exacts dans le logarithme de A.

Supposons, par exemple, qu'avec les tables de Callet, à vingt chiffres décimaux, qui ne s'étende que jusqu'à 1200, on ait besoin du logarithme de 58321; on développera d'abord 5,8321 en fraction continue, ce qui donnera

$$\frac{58321}{10000}=5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{21+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}}}}}$$

d'où résulteront les réduites consécutives

$$\frac{5}{1},\ \frac{6}{1},\ \frac{29}{5},\ \frac{35}{6},\ \frac{764}{131},\ \frac{799}{137},\ \frac{2362}{405}\ \frac{10247}{1757},\ \frac{12609}{2162},\ \ldots\ldots$$

Nous prendrons donc ici les deux réduites consécutives $\frac{764}{131}$, $\frac{799}{137}$, dont nous chercherons les logarithmes ainsi qu'il suit :

$$\begin{array}{lllll}
\text{Log } 764 = 2{,}88309 & 33585 & 75689 & 92806 \\
\text{Log. } 131 = 2{,}11727 & 12956 & 55764 & 26081 \\
\hline
\text{Log. } \frac{764}{131} = 0{,}76582 & 20629 & 19925 & 66725 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
\text{Log. } 799 = 2{,}90254 & 67793 & 13991 & 39295 \\
\text{Log. } 137 = 2{,}13672 & 05671 & 56406 & 76856 \\
\hline
\text{Log } \frac{799}{137} = 0{,}76582 & 62121 & 57584 & 62439 \\
\hline
\end{array}$$

logarithmes qui ne s'accordent encore que dans les cinq premiers chiffres décimaux ; mais nous verrons bientôt ce qu'il faut faire pour aller plus avant.

Lorsque les réduites, dont les deux termes excèdent les limites des tables, sont telles que ces termes sont décomposables en facteurs qui ne les excèdent pas, on peut prendre deux réduites consécutives plus éloignées, et on obtient ainsi une plus grande approximation.

Ainsi, dans le cas présent, comme $\frac{2362}{405} = \frac{2.1181}{405}$, on pourra prendre cette réduite avec la dernière des précédentes. En calculant son logarithme, on trouve

$$\begin{array}{llllll}
 & \text{Log. } 2 = 0{,}30102 & 99956 & 63981 & 19521 \\
 & \text{Log. } 1181 = 3{,}07224 & 98976 & 13514 & 79908 \\
\text{Comp. Arith.} & \text{Log. } 405 = 7{,}39254 & 49767 & 85331 & 44603 \\
\hline
 & \text{Log. } \frac{2362}{405} = 0{,}76582 & 48700 & 62827 & 44032 \\
\hline
\end{array}$$

ce qui ne nous donnerait toujours que cinq chiffres décimaux exacts du logarithme de 5,8321.

Retournons présentement au cas général et soit $\frac{a}{b}$ la dernière réduite, dont les termes, ou du moins aucun de leurs facteurs premiers, n'excèdent les limites des tables. Soit posé

$$\frac{A}{10^n}=\frac{a}{b}\left(\frac{1+x}{1-x}\right); \qquad (1)$$

il en résultera

$$x=\frac{Ab-10^n.a}{Ab+10^n.a}.$$

Il est facile de voir que x sera une quantité fort petite, car sa valeur peut être écrite comme il suit :

$$x=\frac{\frac{A}{10^n}-\frac{a}{b}}{\frac{A}{10^n}+\frac{a}{b}};$$

or, on sait que

$$\frac{A}{10^n}-\frac{a}{b}<\frac{1}{b^2};$$

d'où résulte

$$x<\frac{1}{b^2\left(\frac{A}{10^n}+\frac{a}{b}\right)};$$

et comme on a aussi

$$\frac{A}{10^n}+\frac{a}{b}>1,$$

on aura, à plus fort raison,

$$x < \frac{1}{b^2} .$$

Cela posé, la formule (1) donne

$$\text{Log.} \frac{A}{10^n} = \text{Log.} \frac{a}{b} + \text{Log} \frac{1+x}{1-x} = \text{Log.} \frac{a}{b} + 2M\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right);$$

c'est-à-dire,

$$\text{Log.} A = n + \text{Log.} a - \text{Log.} b + 2M\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right);$$

M étant le module des tables pour lesquelles on calcule. Or, x étant, ainsi que nous venons de le voir, une fort petite quantité, un ou deux termes de la série suffiront le plus souvent pour obtenir une valeur fort approchée de Log. A.

Par exemple, dans le cas que nous avons considéré tout à l'heure, en prenant $\frac{2362}{405}$ pour $\frac{a}{b}$, on aura

$$x = \frac{58321 \times 405 - 23620000}{58321 \times 405 + 23620000},$$

c'est-à-dire,

$$x = \frac{5}{47240005} = \frac{1}{9448001};$$

d'où il est aisé de voir que $\frac{x^3}{3}$ multiplié par $2M$, qui est moindre que l'unité, et réduit en décimales aura au moins vingt zéros entre la virgule et le premier chiffre significatif, de sorte qu'on peut se dispenser d'y avoir égard, et écrire simplement

$$\text{Log.} 58321 = 4 + \text{Log.} \frac{2362}{405} + \frac{2M}{9448001};$$

or, on a

$$M = 0,43429 \quad 44819 \quad 03251 \quad 82765,$$

ce qui donne

$$\frac{2M}{9448001}=0,00000\quad 00919\quad 44207\quad 43675$$

or, nous avons trouvé tout à l'heure

$$\mathrm{Log}\,\frac{2362}{405}=0,76582\quad 48700\quad 62827\quad 44032\ ;$$

nous aurons donc exactement à vingt chiffres décimaux

$$\mathrm{Log}\,58321=4,76582\quad 49620\quad 07034\quad 87707\,. \qquad (*)$$

(*) Voici encore un moyen assez simple qui peut être employé dans bien des cas. Soit p un très-grand nombre premier dont on veut obtenir le logarithme ; ce nombre est la demi-somme des deux nombres $p+1$ et $p-1$. Or, on sait que, lorsque deux nombres sont très-grands et très-peu différens, leur demi-somme diffère très-peu de la racine quarrée de leur produit ; de sorte qu'à $\mathrm{Log}.p$ on pourra, sans erreur sensible, substituer $\mathrm{Log}.\sqrt{(p+1)(p-1)}$, c'est-à-dire $\frac{\mathrm{Log}\,(p+1)+\mathrm{Log}.(p-1)}{2}$; or, comme $p+1$ et $p-1$ ne sont premiers ni l'un ni l'autre, il est fort possible qu'ils soient tous deux décomposables en facteurs qui n'excèdent point les limites des tables ; et alors on pourra, sans difficulté, obtenir le logarithme de p.

Pour connaître à quelle erreur on s'expose, en employant ce procédé, on remarquera que

$$\mathrm{Log}\,p-\frac{\mathrm{Log}.(p+1)+\mathrm{Log}.(p-1)}{2}=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}.\,\frac{p^2}{p^2-1}=M\left\{\frac{1}{2p^2-1}+\frac{1}{3(2p^2-1)^3}+\ldots\right\}\ ;$$

d'où l'on voit que l'erreur sera d'autant moindre que p sera plus grand, et qu'on pourra compter sur un nombre de chiffres décimaux double du nombre des chiffres de p.

Dans le cas de l'exemple du texte, on aura

$$p+1=58322=241.242\ ,$$

$$p-1=58320=216.270\ ;$$

ce qui donnera sensiblement

$$\mathrm{Log}.58321=\frac{\mathrm{Log}.216+\mathrm{Log}.241+\mathrm{Log}.242+\mathrm{Log}.270}{2}\ ,$$

que l'on calculera comme il suit :