
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

CAMILLE PAGLIANI

**Solution du problème d'analyse indéterminée énoncé à
la pag. 212 du présent volume**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 382-384

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__382_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1829-1830, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*Solution du problème d'analyse indéterminée
énoncé à la pag. 212 du présent volume ;*

Par M. Camille PAGLIANI, cadet au corps royal des
Pionniers, à Modène.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

PROBLÈME. *Trouver, dans la suite naturelle, mille nombres consécutifs, tels que la somme de leurs cubes soit elle-même un cube ?*

Solution. Voyons d'abord comment on pourrait traiter le problème pour le cas général de m nombres consécutifs ; nous passerons ensuite au cas particulier de la question proposée.

Soit $x+1$ le plus petit de ces nombres, le plus grand sera $x+m$; la somme de leurs cubes sera évidemment égale à la somme des cubes des $x+m$ premiers nombres naturels ; moins la somme des cubes des x premiers nombres naturels.

Or, il est connu que généralement la somme des cubes des k , premiers nombres naturels, est égale au carré de la somme de ces mêmes nombres, et a, conséquemment, pour expression

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

En représentant donc par S_3 la somme des cubes de nos m nombres consécutifs, nous aurons

$$S_3 = \frac{(x+m)^2(x+m+1)^2 - x^2(x+1)^2}{4} ;$$

ou, en décomposant, par la formule $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$,

$$S_3 = \frac{m}{8} \{(2x+m)+1\} \{(2x+m)^2 + 2(2x+m)+m^2\} ;$$

en faisant donc, pour abréger,

$$2x+m = \gamma, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{\gamma-m}{2},$$

on aura

$$S_3 = \frac{m}{8} (\gamma+1)(\gamma^2+2\gamma+m^2) = \frac{m}{8} \{\gamma^3+3\gamma^2+(m^2+2)\gamma+m^2\} .$$

Si m est le cube d'un nombre pair, et c'est le cas particulier de la question proposée, en représentant ce nombre pair par $2n$, nous pourrions faire $m=8n^3$, ce qui donnera

$$S_3 = n^3 \{\gamma^3+3\gamma^2+2(32n^6+1)\gamma+64n^6\} ;$$

il s'agira donc de rendre un cube parfait le polynome que multiplie n^3 dans cette valeur de S_3 ; or, comme les termes extrêmes de ce polynome sont les cubes respectifs de γ et de $4n^2$, on est tout naturellement conduit à supposer que ce polynome est le cube de $\gamma+4n^2$, ce qui donne d'abord

$$S_3 = \{n(\gamma+4n^2)\}^3 ,$$

et ensuite

$$\gamma^3+3\gamma^2+2(32n^6+1)\gamma+64n^6 = (\gamma+4n^2)^3 ;$$

d'où, en développant et réduisant

$$3(4n^2-1)\gamma^2 - 2(32n^6-24n^4+1)\gamma = 0 ,$$

ce qui donne

$$\gamma = 0, \quad \gamma = \frac{2(32n^6-24n^4+1)}{3(4n^2-1)} ;$$

de là

$$y + 4n^2 = 4n^3, \quad y + 4n^2 = \frac{2(32n^6 - 6n^2 + 1)}{3(4n^2 - 1)};$$

d'où .

$$S_3 = (4n^3)^3, \quad S_3 = \left\{ \frac{2n(32n^6 - 6n^2 + 1)}{3(4n^2 - 1)} \right\}^3.$$

Présentement, la valeur de x en y devient

$$x = \frac{y - m}{2} = \frac{y - 8n^3}{2};$$

d'où, en substituant, tour à tour, les deux valeurs de y

$$x = -4n^3, \quad x = \frac{32n^6 + 48n^5 - 24n^4 - 12n^3 + 1}{3(4n^2 - 1)}.$$

Dans le cas particulier de la question proposée on a $n=5$; il en résulte,

$$x = -500, \quad x = 1133, \\ S_3 = (500)^3, \quad S_3 = (16830)^3;$$

on a, en conséquence,

$$x + 1 = -499, \quad x + 1 = 1134, \\ x + 1000 = +500, \quad x + 1000 = 2133;$$

et conséquemment,

$$(-499)^3 + (-498)^3 + (-497)^3 + \dots + (+497)^3 + (+498)^3 + (+499)^3 + (+500)^3 = (500)^3, \\ (1134)^3 + (1135)^3 + (1136)^3 + \dots + (2131)^3 + (2131)^3 + (2133)^3 = (16830)^3;$$

le premier de ces résultats est d'ailleurs évident de lui-même, puisque tous les cubes qui précèdent le dernier se détruisent deux à deux par l'opposition des signes.

Il est possible que le problème admette encore d'autres solutions; mais il est probable qu'on ne pourrait les déduire que d'une analyse très-laborieuse.