
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

Questions résolues. Solution de deux des six problèmes de géométrie énoncés à la pag. 155 du XVIII.me volume des Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 84-86

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__84_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1829-1830, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution de deux des six problèmes de géométrie énoncés à la pag. 155 du XVIII.^{me} volume des Annales ().*

~~~~~

**PROBLÈME I.** *Décrire une sphère qui intercepte, sur quatre plans donnés, des cercles dont les rayons soient respectivement égaux à des longueurs données ?*

**PROBLÈME II.** *Décrire une sphère telle que les cônes circonscrits qui auront leurs sommets en quatre points donnés, aient leurs angles générateurs respectivement égaux à des angles donnés ?*

*Solution du premier problème ;*

Par un A B O N N É.

Soient A, B, C, D les quatre plans donnés, O le centre de la sphère cherchée,  $r$  son rayon,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  les centres des cercles qu'elle doit intercepter sur les plans donnés, et enfin  $a, b, c, d$  les rayons respectifs de ces cercles; on aura évidemment

$$r^2 = a^2 + \overline{O\alpha}^2 = b^2 + \overline{O\beta}^2 = c^2 + \overline{O\gamma}^2 = d^2 + \overline{O\delta}^2 ;$$

d'où

$$\overline{O\delta}^2 - \overline{O\alpha}^2 = a^2 - d^2 ,$$

$$\overline{O\delta}^2 - \overline{O\beta}^2 = b^2 - d^2 ,$$

$$\overline{O\delta}^2 - \overline{O\gamma}^2 = c^2 - d^2 ;$$

---

(\*) Voy., pour la résolution des deux autres de ces problèmes, la pag. 175 du XIX.<sup>me</sup> volume du présent recueil.

de sorte que la question se réduit à trouver un point  $O$  de l'espace, tel que les différences entre le quarré de sa distance au plan  $D$  et les quarrés de ses distances aux trois autres plans  $A, B, C$ , soient égales à trois quantités données.

D'après ce qui a été déjà remarqué ( tom. XIX , pag. 177 ), le lieu géométrique des centres de tous les cercles qui interceptent sur les deux côtés d'un angle donné, des longueurs respectivement égales à  $2a$  et  $2d$ , est une hyperbole équilatère ayant son centre au sommet de cet angle, ayant pour asymptotes les deux droites perpendiculaires l'une à l'autre, qui divisent cet angle et ses supplémens en deux parties égales, et qui passent par les quatre points dont les distances aux deux côtés de l'angle sont respectivement égales à  $a$  et  $d$ .

Il suit évidemment de là que le lieu géométrique des centres de toutes les sphères qui interceptent, sur les deux faces d'un angle dièdre donné, des cercles dont les rayons sont respectivement égaux à  $a$  et  $d$ , est un cylindre hyperbolique équilatère, dont les plans asymptotiques sont les deux plans, perpendiculaires l'un à l'autre, qui divisent l'angle proposé et ses supplémens en deux parties égales et qui a pour quatre de ses génératrices les parallèles à l'arête de l'angle dièdre, dont les distances à ses faces sont respectivement égales à  $a$  et  $d$ .

En conséquence, la solution du problème proposé se réduit à ce qui suit: Soient construites les trois surfaces cylindriques, hyperboliques, équilatères qui répondent aux angles dièdres que fait le plan  $D$  avec chacun des plans  $A, B, C$ ; ces surfaces se couperont généralement en huit points, centres d'autant de sphères qui résoudront le problème.

Les centres des sphères cherchées étant ainsi déterminés, rien ne sera plus aisé que d'en trouver les rayons respectifs; car, pour chacune d'elles, en abaissant de son centre une perpendiculaire sur l'un quelconque des plans donnés, cette perpendiculaire et le rayon du cercle intercepté sur ce plan seront les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypothénuse sera le rayon de la sphère.

Si les cercles interceptés sur deux des trois plans A, B, C, devaient être égaux au cercle intercepté sur le plan D, deux des trois surfaces se réduiraient à leurs plans asymptotiques; de sorte qu'il serait facile de ramener la recherche de leur intersection avec la troisième à celle des intersections d'une sphère avec une droite; le problème pourrait donc alors être rigoureusement résolu par les éléments.

Si les quatre cercles devaient tous être égaux, les surfaces cylindriques se réduiraient alors toutes trois à leurs plans asymptotiques, et les centres des sphères cherchées seraient les mêmes que ceux des huit sphères tant inscrites qu'ex-inscrites au tétraèdre formé par les quatre plans donnés, ce qui est d'ailleurs évident.

En considérant que l'on peut raisonner sur chacun des trois autres plans comme nous avons raisonné sur le plan D, on conclura de tout ceci le théorème suivant :

*THÉORÈME I. Un tétraèdre T étant donné, si l'on en construit un autre T' dont les faces, respectivement parallèles aux siennes, en soient à des distances a, b, c, d; en construisant des cylindres hyperboliques équilatères, dont les plans asymptotiques soient ceux qui divisent les angles dièdres du tétraèdre T et leurs supplémens en deux parties égales, et tels que chacun d'eux ait, pour une de ses génératrices, l'arête du tétraèdre T' qui est parallèle à son axe; ces six cylindres se couperont aux huit mêmes points, centres d'autant de sphères qui intercepteront sur les plans des faces du tétraèdre T des cercles dont les rayons seront respectivement égaux aux longueurs a, b, c, d.*