ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

AMPÈRE

Astronomie. Démonstration élémentaire du principe de la gravitation universelle

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 89-96

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__89_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1829-1830, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

ASTRONOMIE.

Démonstration élémentaire du principe de la gravitation universelle ;

Par M. Ampère, de l'Académie royale des sciences de Paris, etc.

Personne ne doute de l'avantage qu'il y a à mettre à la portée de ceux dont les connaissances en mathématiques se bornent aux élémens de la géométrie et de l'algèbre, l'étude de la physique générale, de cette science la plus utile peut-être à tous les hommes dès qu'ils vivent en société, et qui est comme la base de toutes les sciences naturelles. Fondée sur l'expérience et l'observation des faits, elle a pour objet de ramener ceux-ci à des lois générales, et de remonter à leurs causes, quand il nous est permis de les connaître.

Parmi les phénomènes qui se reproduisent sans cesse autour de nous, ceux qui sont dus à la pesanteur sont peut-être les plus fréquemment offerts à nos observations, et se mêlent, en quelque sorte, à tous les autres. Or, comment celui qui étudie la physique pourrait-il se faire une idée juste de ces phénomènes, s'il ne savait pas que la force qui les produit n'est qu'un cas particulier de cette force universelle, en vertu de laquelle toutes les particules de la matière s'attirent en raison inverse du quarré de leur distance, et si, en calculant, d'après cette loi, ce que la pesanteur, telle que nous l'observons à la surfaee de la terre, devient à la distance où la lune est de notre globe, il ne vérifiait pas qu'elle est précisément la force et la seule force qui retient notre satellite dans son orbite?

Il est aisé de faire comprendre à ceux qui ont quelque idée de la construction et du calcul des triangles, comment Képler a découvert les trois lois du mouvement des planètes; et les notions de statique les plus élémentaires suffisent pour comprendre comment de la première de ces lois, c'est-à-dire de la proportionnalité des aires décrites autour du soleil aux temps employés à les décrire, il résulte que la force qui agit constamment sur les planètes pour faire varier leur vitesse et la direction de leur mouvement, est toujours dirigée vers le centre de cet astre; mais lorsqu'on veut déduire des deux autres lois de Képler, d'abord pour une même planète à divers points de son orbite, ensuite pour les différentes planètes, que cette force est en raison inverse du quarré de la distance, la démonstration purement géométrique donnée par le grand Newton, la seule qui puisse trouver place dans un traité élémentaire de physique, suppose qu'on connaît un assez grand nombre de propriétés de l'ellipse qu'ignorent, en général, ceux qui se livrent à l'étude de cette science, surtout depuis qu'on a banni de l'enseignement public les démonstrations synthétiques des principales propriétés des sections coniques.

J'ai donc cru faire une chose utile à tous ceux qui étudient et enseignent la physique, et qui ne veulent pas ignorer ou laisser ignorer à leurs élèves une des lois les plus importantes de l'économie de l'univers, en cherchant l'expression de la force centrale dans une ellipse décrite par un point matériel, de manière que les aires, autour d'un de ses foyers, soient proportionnelles aux temps, sans supposer que l'on connaisse préalablement aucune des propriétés de cette courbe. Pour cela, à l'exemple de ce qu'a fait le marquis de l'Hôpital, dans le second chapitre du sixième livre de son *Traité analytique des sections coniques*, je définirai l'ellipse une section faite par un plan quelconque dans un cylindre à base circulaire, que je supposerai droit (*); et j'admettrai seulement comme connus les théorèmes les plus élémentaires de la géométrie, et les quatre suivans dont la démonstration est si facile que je ne crois pas devoir m'y arrêter.

1.° Deux tangentes menées d'un même point extérieur à une sphère et terminées à leurs points de contact, sont de même longueur.

2.° Un angle dièdre étant circonscrit à une sphère, les droites menées d'un même point de son arête aux points de contact de la sphère, avec ses faces, font des angles égaux avec cette arête.

3.° Les projections de deux parties d'une même droite ou de deux droites parallèles sur un même plan, sont entre elles comme ces droites elles-mêmes.

4.° Les aires des projections, sur un plan quelconque de deux figures situées dans un autre plan, sont entre elles comme les aires de ces figures elles-mêmes.

Cela posé, soit AMBL (fig. 1) la section faite dans un cylindre droit, à base circulaire *ambl*, à laquelle on a donné le nom d'*ellipse*. Le point C, où le plan coupant rencontre l'axe C*c* du cylindre, se nomme le *centre* de cette ellipse, et, si l'on inscrit au cylindre une surface sphérique S*ambl*, qui touche le plan sécant en S, ce point S prend le nom de *foyer* de l'ellipse.

Comme on peut, dans un cylindre, prendre pour base la section circulaire faite dans sa surface par tel plan perpendiculaire à son

---

(*) M. Ferriot, par une semblable considération, a fort simplement démontré (*Annales*, tom. II, pag. 240) les diverses propriétés de l'ellipse qui ne dépendent pas de ses foyers. Quant à la situation et aux propriétés de ces deux points, on ne saurait trouver rien de plus simple que ce qui a été donné par MM. Quetelet et Dandelin (*Annales*, tom. XV, pag. 387), et qui s'étend, sans aucune complication nouvelle, aux sections du cône et de l'hyperboloïde de révolution à une nappe.

J. D. G.

axe qu'on veut, nous prendrons pour cette base celui *ambl* qui passe par le centre *c* de la surface sphérique inscrite. Alors la circonférence de cette base est évidemment la ligne de contact de cette surface sphérique avec la surface du cylindre.

Toute droite LM, menée dans le plan de l'ellipse, par son centre C, et terminée de part et d'autre à la courbe, se projète, sur le plan de sa base, par un plan *l*LM*m* qui contient l'axe C*c*; d'où il suit que sa projection *lm* est un diamètre de cette base; et, comme les projections *cl*, *cm*, des deux parties CL, CM, de la droite LM sont égales, il s'ensuit (3.°) que CL=CM, et qu'ainsi le centre C est le milieu de LM.

Si, aux deux extrémités *l*, *m*, du diamètre *lm*, on mène, dans le plan de la base, les deux tangentes *lh* et *mt*, perpendiculaires au diamètre *lm*, et par conséquent parallèles entre elles, et qu'on mène par ces tangentes et par les arêtes *l*L, *m*M du cylindre, deux plans, ils seront tangens à sa surface et parallèles entre eux; leurs intersections LH, MT, avec le plan de l'ellipse, seront donc aussi tangentes à cette ellipse en L et M et parallèles entre elles; d'où il suit que toute droite passant par le centre de la courbe la coupe en deux points dont les tangentes sont parallèles.

Il est aisé de voir qu'une telle droite coupe en deux parties égales toutes les cordes de l'ellipse parallèles à ces tangentes; c'est pour quoi on lui a donné le nom de *diamètre*. Au reste, la considération de cette propriété qui résulte de ce que ces cordes se projètent sur le plan de la base par des cordes de cette base parallèles aux tangentes *lh*, *mt*, et par conséquent perpendiculaires au diamètre *lm*, qui les coupe toutes en deux parties égales, est inutile pour la démonstration qui fait le sujet de cet écrit.

Une droite, telle que SM, menée du foyer S à un quelconque M des points de l'ellipse se nomme *rayon vecteur*. Comme le plan sécant où se trouve cette droite touche la surface sphérique en S, il s'ensuit que le rayon vecteur, au point M, est une tangente menée par ce point à la surface sphérique.

Mais l'arête Mm du cylindre est aussi une tangente menée du point M à la surface sphérique ; donc (1.°) SM$=$Mm ; et (2.°) *Ang*.TMS$=$*Ang*.TMm.

De même que SM$=$Mm, on doit avoir aussi SL$=$Ll et par conséquent SL$+$SM$=$L$l+$Mm ; mais dans le trapèze lLMm, L$l+$Mm est double de Cc ; de sorte qu'en désignant par a cette longueur Cc, constante pour une même ellipse, on aura

$$SL+SM=2a\ .$$

De même que l'angle SMT est égal à l'angle TMm, l'angle SLH doit aussi être égal à l'angle HLl ; mais les angles TMm et HLl sont égaux entre eux, comme ayant les côtés parallèles ; donc on doit avoir aussi

$$Ang.SLH=Ang.SMT\ ;$$

Ainsi, la somme des longueurs des droites menées du foyer aux extrémités d'un même diamètre est constante, et ces droites font des angles égaux avec les tangentes aux extrémités de ce diamètre.

Si l'on fait tourner le diamètre LM autour du centre C, il variera de longueur, mais sera toujours plus petit que la constante $2a$, égale à la ligne brisée LSM, jusqu'à ce que le diamètre prenne la position AB, où il passe par le point S. Alors SL devenant égale à SA et SM à SB, on a AB$=$SA$+$SB$=2a$; cette constante est donc le plus grand des diamètres de l'ellipse, que l'on connaît sous le nom de *grand axe* (*).

(*) Cela s'aperçoit aussi très-facilement en considérant que, dans le trapèze, aABb, on a (1.°) A$a$$=AS, Bb$$=$BS ; d'où il suit que

$$2a=2Cc=Aa+Bb=AS+BS=AB\ .$$

J. D. G.

Il est aisé de voir que SA est le plus petit et SB le plus grand des rayons vecteurs. Quand une planète décrit une ellipse, les divers rayons vecteurs sont les distances entre la planète et le soleil, qui en occupe le foyer, aux divers points où elle se trouve successivement de son orbite. SA est donc alors sa plus petite et SB sa plus grande distance au soleil, $a=\frac{SA+SB}{2}=CA=CB$ est par conséquent sa *moyenne distance* à cet astre. On prouverait aisément, si cela était nécessaire, que cette moyenne distance a lieu aux deux extrémités du diamètre perpendiculaire à AB.

Si l'on prolonge le rayon vecteur MS au-delà de S, jusqu'à ce qu'il rencontre en H la tangente LH, parallèle à la tangente MT qui répond au point M, l'angle SHL sera égal, comme alterne interne, à l'angle SMT, que nous avons déjà vu être égal à l'angle SLH; d'où il suit que le triangle HSL est isocèle, et qu'ainsi on a $SH=SL$; puis donc qu'on a $SM+SL=2a$, on aura aussi $MH=SM+SH=2a$; la droite MH, déterminée, comme nous venons de le dire, est donc toujours égale à la constante $2a$.

Rien n'est plus facile maintenant que de trouver l'expression de la force centrale dans l'ellipse. On sait qu'il faut pour cela concevoir deux rayons vecteurs SM et SN, extrêmement rapprochés l'un de l'autre, et calculer la longueur du prolongement NR du second, terminé par la tangente MT à l'extrémité du premier.

Or, en projetant le secteur MSN en *msn* sur le plan de la base du cylindre, on a, pour la projection de NR, la partie *nr* de la droite *sur* comprise entre la circonférence de la base du cylindre et la tangente *mr*. Or, MH et NR peuvent être considérées ici comme des droites parallèles dont le rapport doit conséquemment (3.°) être le même que celui de leurs projections; ce qui donne

$$NR=MH.\frac{nr}{mh}=2a.\frac{nr}{mh} .$$

Si du point n on abaisse sur mr la perpendiculaire nv, le triangle nvr sera semblable au triangle mlh comme ayant ses côtés respectivement parallèles à ceux de ce dernier; ainsi

$$lm : mh :: nv : nr = \frac{mh.nv}{lm} \text{ ,}$$

ce qui changera l'expression de NR en celle-ci

$$\text{NR} = \text{MH} : \frac{nv}{lm} = 2a . \frac{nv}{lm} \text{ .}$$

Soient T le temps qu'emploie la planète à décrire son orbite, t le temps qu'elle emploie à aller de M en N, E la surface de l'ellipse et B celle de la base du cylindre; on aura

$$T : t :: E : \text{MSN} :: B : msn \text{ ;} \qquad (4.°)$$

or $B = \frac{1}{4}\varpi.\overline{lm}^2$; et, en abaissant du point s la perpendiculaire st sur la tangente mt, on a, en négligeant les infiniment petits du second ordre, vis-à-vis de ceux du premier,

$$smn = \tfrac{1}{2}st.mv = \tfrac{1}{2}st.\sqrt{lm.nv} \text{ ;}$$

de sorte que notre proportion devient

$$T : t :: \tfrac{1}{2}\varpi.\overline{lm}^2 : st.\sqrt{lm.nv} \text{ ;}$$

ou bien, en quarrant et simplifiant,

$$T^2 : t^2 :: \tfrac{1}{4}\varpi^2.\overline{lm}^3 : \overline{st}^2.nv \text{ ;}$$

ce qui donne

$$\frac{nv}{lm} = \tfrac{1}{4}\varpi^2 . \frac{t^2}{T^2} . \frac{\overline{lm}^2}{\overline{st}^2} \text{ ;}$$

ce qui change la valeur de NR en celle-ci

$$NR = \frac{1}{2}\varpi^2 a . \frac{t^2}{T^2} . \left(\frac{lm}{st}\right)^2 ;$$

mais à cause des triangles rectangles semblables *stm* et *mlh*

$$lm : st :: mh : sm :: MH : SM ,$$

de sorte que, dans l'expression de NR, on peut remplacer $\frac{lm}{st}$ par $\frac{MH}{SM}$ ou par $\frac{2a}{SM}$, au moyen de quoi elle deviendra

$$NR = 2\varpi^2 a^3 . \frac{t^2}{T^2} . \frac{1}{\overline{SM}^2} ;$$

or, en nommant φ la force centrale, on a

$$NR = \frac{\varphi t^2}{2} , \qquad \text{d'où} \qquad \varphi = \frac{2NR}{t^2} ;$$

donc

$$\varphi = \frac{4\varpi^2 a^3}{T^2} . \frac{1}{\overline{SM}^2} ;$$

la force φ est donc en raison inverse du quarré de la distance, dans une même ellipse, où a^3 et T^2 sont deux constantes.

A la distance 1, la force accélératrice est simplement

$$\Phi = 4\varpi \frac{a^3}{T^2} ;$$

qui sera la même pour deux planètes différentes, si l'on a

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2} ;$$

c'est-à-dire, qu'elle est la même pour toutes les planètes, en vertu de la troisième loi de Képler.