ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

C. LAMBERT

Optique. Recherches sur les caustiques planes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 97-108
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__97_0>

OPTIQUE.

Recherches sur les caustiques planes ;

Par M. C. Lambert, aspirant ingénieur des mines, ancien élève de l'école polytechnique.

L'enveloppe commune de toutes les normales à une courbe plane est ce qu'on appelle la *développée* de cette courbe ; le point de contact de cette enveloppe avec chaque normale est dit le *centre de courbure* du point correspondant de la courbe proposée ; et la droite qui joint ces deux points est nommée le *rayon de courbure* de la courbe, en ce même point.

Mais si, par les différens points d'une courbe proposée, on mène des droites faisant avec ses normales, en ces mêmes points, des angles constans ou variables suivant une loi mathématique donnée quelconque, ces droites auront aussi, comme les normales, une enveloppe commune que, par analogie, on pourra appeler une *développée oblique* de la courbe proposée ; le point de contact de cette nouvelle enveloppe, avec chacune des droites qui auront concouru à sa détermination, pourra être dit le *centre de courbure oblique* du point correspondant de la courbe primitive ; et enfin la droite qui joindra ces deux points pourra être nommée le *rayon de courbure oblique* de cette courbe, en ce même point.

Si, par exemple, la courbe proposée est un cercle, et que l'angle des rayons de courbure obliques avec les rayons de courbure orthogonaux soit constant, la développée oblique sera évidemment un autre cercle concentrique avec le premier. Si, dans le même cas d'un angle constant, on veut que la développée oblique se réduise à un point, il faudra que la courbe proposée soit une spirale logarithmique. Si cette courbe proposée se réduit à une droite, et que les angles croissent comme les distances des normales à un point fixe de cette droite, la développée oblique sera la développée orthogonale d'une cycloïde, et conséquemment une autre cycloïde, et ainsi du reste.

La théorie générale des développées obliques, qui paraît n'avoir pas encore fixé l'attention des géomètres, et sur laquelle nous pourrons revenir dans une autre occasion, conduit, avec une merveilleuse simplicité, à une multitude de résultats curieux qu'on ne déduirait souvent que d'une manière très-pénible des procédés ordinaires d'investigation. Nous nous bornerons, pour le présent, à établir les principales formules qui lient les développées obliques aux développées orthogonales et à en faire une application spéciale à l'optique.

Soient M et M′ (fig. 2) deux des points d'un arc de courbe donné, C et C′ les deux points correspondans de sa développée orthogonale, centres de courbure respectifs de la courbe en M et M′, m et m' les centres de courbure correspondans de l'une de ses développées obliques, et O l'intersection de C′M′ et de mM. Du point m' comme centre, et avec sa distance au point M pour rayon, soit décrit un arc de cercle, se terminant en A, sur la direction de m'M′.

Désignons par S l'arc de la courbe MM′, compté de M vers M′, par s l'arc de la courbe mm', compté de m vers m', par R le rayon de courbure orthogonal CM, par r le rayon de courbure oblique mM, par θ l'angle CMm que forment entre eux ces deux rayons, par Σ le quadrilatère mixtiligne MCC′M′, et par σ le quadrilatère mixtiligne Mmm'M′.

Si nous supposons le point M′ infiniment voisin du point M, les points C′ et m' seront aussi infiniment voisins des points C et m, les arcs CC′ et mm' pourront être considérés comme les prolongemens rectilignes respectifs de MC et Mm; les espaces MCC$'$M$'$ et Mmm'M$'$ pourront aussi être considérés comme de simples secteurs, ou encore comme des triangles; et MA comme une simple perpendiculaire, soit à mM soit à m'M$'$.

Dans la même hypothèse on aura

$$\mathrm{MM'}=\mathrm{d}S\ ,\qquad \mathrm{CC'}=\mathrm{d}R\ ,\qquad mm'=\mathrm{d}s$$

$$\mathrm{M'C'}=R+\mathrm{d}R\ ,\qquad \mathrm{M'}m'=r+\mathrm{d}s\ ,\qquad \mathrm{Ang.C'M'}m'=\theta+\mathrm{d}\theta\ .$$

On aura ensuite

$$\mathrm{MA}=\mathrm{MM'Cos.}\theta=\mathrm{d}S\mathrm{Cos.}\theta\ ,\qquad \mathrm{M'A}=\mathrm{MM'Sin.}\theta\pm\mathrm{d}S\mathrm{Sin.}\theta\ ;$$

mais on a

$$m\mathrm{M}+m\mathrm{M'}=m'\mathrm{M}=m'\mathrm{A}=m'\mathrm{M'}+\mathrm{M'A}\ ;$$

il viendra donc, en substituant,

$$r+\mathrm{d}s=r+\mathrm{d}r+\mathrm{d}S\mathrm{Sin.}\theta\ .$$

Ou en réduisant

$$\mathrm{d}s=\mathrm{d}r+\mathrm{Sin.}\theta\ . \qquad (1)$$

On a aussi

$$Ang.\mathrm{MC'O}=\frac{\mathrm{MM'}}{\mathrm{C'M}}=\frac{\mathrm{d}S}{R+\mathrm{d}R}\ ,\qquad Ang.\mathrm{M'}m'\mathrm{O}=\frac{\mathrm{MA}}{m'\mathrm{M}}=\frac{\mathrm{d}S\cdot\mathrm{Cos.}\theta}{r+\mathrm{d}s}\ ;$$

mais, à cause que les triangles MOC$'$ et M$'$Om' ont un angle égal en O, on doit avoir

$$Ang.\mathrm{OMC'}+Ang.\mathrm{OC'M}=Ang.\mathrm{OM'}m'+Ang.\mathrm{O}m'\mathrm{M'}\ ,$$

c'est-à-dire, en substituant,

$$\theta+\frac{\mathrm{d}S}{R+\mathrm{d}R}=(\theta+\mathrm{d}\theta)+\frac{\mathrm{d}S\mathrm{Cos.}\theta}{r+\mathrm{d}s}\ ;$$

ou, en réduisant,

$$\frac{\mathrm{d}S}{R+\mathrm{d}R}=\mathrm{d}\theta+\frac{\mathrm{d}S.\mathrm{Cos}.\theta}{r+\mathrm{d}s}\ ;$$

ou bien encore

$$(r+\mathrm{d}s)\mathrm{d}S=(R+\mathrm{d}R)(r+\mathrm{d}s)\mathrm{d}\theta+(R+\mathrm{d}R)\mathrm{d}S\,\mathrm{Cos}.\theta\ ;$$

ou, en développant, supprimant les termes de plus d'une dimension en différentielles et divisant par dS

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}S}=\frac{1}{R}-\frac{\mathrm{Cos}.\theta}{r}\ . \qquad (2)$$

On a enfin

$$Sect.\mathrm{MC'M'}=\tfrac{1}{2}\mathrm{MM'.C'M}\ , \qquad Sect.\mathrm{M}m'\mathrm{M'}=\tfrac{1}{2}m'\mathrm{M'.MA}\ ;$$

c'est-à-dire,

$$\mathrm{d}\Sigma=\tfrac{1}{2}(R+\mathrm{d}R)\mathrm{d}S\ , \qquad \mathrm{d}\sigma=\tfrac{1}{2}(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}S.\mathrm{Cos}.\theta\ ;$$

ou, en supprimant les termes de deux dimensions en différentielles ;

$$\mathrm{d}\Sigma=\tfrac{1}{2}R\mathrm{d}S\ , \quad (3) \qquad \mathrm{d}\sigma=\tfrac{1}{2}r\mathrm{d}S\mathrm{Cos}.\theta\ . \quad (4)$$

Ces quatre formules, qu'il serait assez difficile d'obtenir par les procédés ordinaires de la géométrie analytique, répondent à la figure telle que nous l'avons supposé construite ; mais il sera aisé, dans tous les cas, d'y faire les changemens de signes qu'exigeront les circonstances particulières dans lesquelles on pourra se trouver.

Pour deux développées obliques d'une même courbe donnée, on obtiendrait évidemment deux systèmes de pareilles équations ; de sorte qu'en affectant d'un accent les symboles relatifs à la seconde développée oblique, nous aurons, entr'autres formules, les quatre équations

$$ds = dr + dS\,\mathrm{Sin.}\theta\ ,\quad (1) \qquad ds' = dr' + dS\,\mathrm{Sin.}\theta'\ ,\quad (1')$$

$$\frac{d\theta}{dS} = \frac{1}{R} - \frac{\mathrm{Cos.}\theta}{r}\ ,\quad (2) \qquad \frac{d\theta'}{dS} = \frac{1}{R} - \frac{\mathrm{Cos.}\theta'}{r'}\ .\quad (2')$$

Présentement nous pouvons supposer que les rayons de courbure de l'une des deux séries sont des rayons incidens, tous tangens à une des développées obliques ; que la courbe proposée est une courbe réfléchissante ou séparatrice de deux milieux homogènes de densité différente, et qu'enfin les rayons de courbure obliques de l'autre série sont les rayons réfléchis ou réfractés à la rencontre de cette courbe, tous tangens à l'autre développée oblique qui sera ainsi la caustique par réflexion ou par réfraction, formée par ces mêmes rayons. Pour cela, il nous faudra, suivant les lois de l'optique, joindre aux quatre équations ci-dessus, l'équation

$$\frac{\mathrm{Sin.}\theta}{\mathrm{Sin.}\theta'} = \frac{\lambda}{\lambda'}\ ,\qquad (5)$$

λ et λ' étant deux nombres constans qui, dans le cas particulier de la réflexion, ne différeront l'un de l'autre que par le signe.

En différentiant l'équation (5), il vient

$$d\theta\,\mathrm{Sin.}\theta'\,\mathrm{Cos.}\theta - d\theta'\,\mathrm{Sin.}\theta\,\mathrm{Cos.}\theta' = 0\ ,$$

ou bien

$$\frac{d\theta}{dS}\,\mathrm{Sin.}\theta'\,\mathrm{Cos.}\theta - \frac{d\theta'}{dS}\,\mathrm{Sin.}\theta\,\mathrm{Cos.}\theta' = 0\ ;$$

mettant dans cette dernière équation pour $\frac{d\theta}{dS}$ et $\frac{d\theta'}{dS}$ leurs valeurs données par les équations (2) et (2'), elle deviendra

$$\frac{\mathrm{Sin.}\theta\,\mathrm{Cos.}^2\theta'}{r'} - \frac{\mathrm{Sin.}\theta'\,\mathrm{Cos.}^2\theta}{r} = \frac{\mathrm{Sin.}(\theta - \theta')}{R}\ .\qquad (6)$$

Au moyen de cette dernière formule, on construira facilement par points la caustique par réfraction qui répondra à une courbe donnée, séparatrice de deux milieux, pour laquelle on saura construire le rayon de courbure en tous ses points, et pour des rayons incidens tous tangens à une même courbe donnée. Menant, en effet, à cette dernière courbe une tangente prolongée jusqu'à son point de rencontre avec la courbe séparatrice, à laquelle on menera une normale par ce point; on connaîtra ainsi, à la fois, la longueur r du rayon incident et l'angle d'incidence θ, duquel on conclura θ', au moyen de l'équation (5); on pourra donc tracer la direction du rayon réfracté; l'équation (6) en fera ensuite facilement connaître la longueur r', et déterminera ainsi un des points de la caustique cherchée.

Si, au lieu de donner la courbe que touchent tous les rayons incidens, on donnait une courbe à laquelle ils fussent tous normaux, ils seraient par là même tous tangens à la développée orthogonale de cette courbe, ce qui ramenerait la question au cas précédent. Dans le cas particulier où ils devraient être tous normaux à un même cercle, ils devraient tous émaner de son centre, de sorte que la première développée oblique se réduirait au point rayonnant et que r serait simplement le symbole général des distances de ce point aux divers points de la courbe séparatrice.

L'équation (6) étant mise sous cette forme

$$\frac{\text{Sin.}\theta\text{Cos.}^2\theta'}{r'}-\frac{\text{Sin.}\theta'\text{Cos.}^2\theta}{r}=\frac{\text{Sin.}\theta\text{Cos.}\theta'-\text{Sin.}\theta'\text{Cos.}\theta}{R},$$

en y mettant pour $\text{Sin.}\theta'$ sa valeur tirée de l'équation (5), elle deviendra divisible par $\text{Sin.}\theta$ et se réduira à

$$\frac{\lambda\text{Cos.}^2\theta'}{r'}-\frac{\lambda'\text{Cos.}^2\theta}{r}=\frac{\lambda\text{Cos.}\theta'-\lambda'\text{Cos.}\theta}{R}; \qquad (7)$$

si nous supposons présentement que l'angle d'incidence est nul, l'équation (5) prouve que l'angle de réfraction le sera aussi ; on aura donc $\text{Cos}.\theta=\text{Cos}.\theta'=1$; ce qui réduira l'équation (7) à

$$\frac{\lambda}{r'}-\frac{\lambda'}{r}=\frac{\lambda-\lambda'}{R}\,. \qquad (8)$$

Ainsi, lorsque les rayons incidens seront tous émanés d'un même point, cette équation donnera fort simplement le point de la caustique par réfraction, qui est situé sur le rayon normal, c'est ce point qu'on appelle le *foyer*, lorsque la courbe séparatrice est un cercle.

Si, dans le cas du cercle, on suppose le point rayonnant infiniment éloigné, l'équation (8) se réduira à

$$\frac{\lambda}{r'}=\frac{\lambda-\lambda'}{R}\,, \qquad \text{d'où} \qquad r'=\frac{\lambda}{\lambda-\lambda'}R\,, \qquad (9)$$

et fera conséquemment connaître la position du foyer des rayons parallèles, ou de ce qu'on appelle le *foyer principal.*

Si, dans cette même équation (8), on suppose que la ligne séparatrice se réduit à une droite ou que R est infini, elle deviendra simplement

$$\frac{\lambda}{r'}-\frac{\lambda'}{r}=0\,, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{r}{r'}=\frac{\lambda'}{\lambda}\,; \qquad (10)$$

ainsi, dans ce cas, les distances du point rayonnant et du foyer à la droite séparatrice sont dans un rapport inverse de celui du sinus d'incidence au sinus de réfraction. C'est aussi ce qu'on a vu (*Annales*, tom. XI, pag. 229).

Si, dans le cas général, les rayons, après une première réfraction, devaient se réfracter de nouveau, une ou plusieurs fois, à la rencontre d'une ou de plusieurs autres courbes séparatrices ; comme, avant chaque réfraction nouvelle, on connaîtrait, par ce qui a été dit ci-dessus, la caustique à laquelle les rayons incidens seraient tangens, on parviendrait, de proche en proche, par les moyens que nous avons indiqués, à construire par points la dernière caustique; de sorte qu'on peut regarder les équations (5) et (6) comme propres à faire connaître par points la caustique résultant de tant de réfractions successives qu'on voudra.

Pour nous borner à un cas des plus simples, et qui offre pourtant d'utiles applications, supposons deux surfaces séparatrices seulement, en désignant par r'' la distance du nouveau point d'incidence au point où le second rayon incident touche la seconde développée oblique, par R' le rayon de courbure de la nouvelle courbe séparatrice au point d'incidence, par r''' la longueur du rayon doublement réfracté, comptée du point de seconde incidence jusqu'à son point de contact avec la troisième développée oblique, et enfin par θ'' et θ''' les angles de seconde incidence et de seconde réfraction, dont nous supposerons les sinus proportionnels à λ' et λ'', nous aurons (5) et (7) les quatre équations

$$\frac{\text{Sin.}\theta}{\text{Sin.}\theta'}=\frac{\lambda}{\lambda'}\,, \qquad \frac{\text{Sin.}\theta''}{\text{Sin.}\theta'''}=\frac{\lambda''}{\lambda'''}\,,$$

$$\frac{\lambda\text{Cos.}^2\theta'}{r'}-\frac{\lambda'\text{Cos.}^2\theta}{r}=\frac{\lambda\text{Cos.}\theta'-\lambda'\text{Cos.}\theta}{R}\,,$$

$$\frac{\lambda''\text{Cos.}^2\theta'''}{r'''}-\frac{\lambda'''\text{Cos.}^2\theta''}{r''}=\frac{\lambda''\text{Cos.}\theta'''-\lambda'''\text{Cos.}\theta''}{R'}\,;$$

on tirera des deux dernières

$$r'=\frac{\lambda\text{Cos.}^2\theta'}{\dfrac{\lambda'\text{Cos.}^2\theta}{r}+\dfrac{\lambda\text{Cos}\,\theta'-\lambda'\text{Cos.}\theta}{R}}\,,$$

$$r''=\frac{\lambda'''\text{Cos.}^2\theta''}{\dfrac{\lambda''\text{Cos.}^2\theta'''}{r'''}-\dfrac{\lambda''\text{Cos.}\theta'''-\lambda'''\text{Cos.}\theta''}{R'}}\,;$$

mais ici r' et r'' ont une même direction qui contient les deux points d'incidence ; de sorte que la distance entre ces deux derniers points devra être égale à leur somme ou à leur différence ; en désignant donc par e cette distance, on aura

$$e=\frac{\lambda'''\text{Cos.}^2\theta''}{\frac{\lambda''\text{Cos.}^2\theta'''}{r'''}-\frac{\lambda''\text{Cos.}\theta'''-\lambda''\text{Cos.}\theta''}{R'}}\pm\frac{\lambda\text{Cos.}^2\theta'}{\frac{\lambda'\text{Cos.}^2\theta}{r}+\frac{\lambda\text{Cos.}\theta'-\lambda'\text{Cos.}\theta}{R}}\,;\quad(11)$$

formule qui, en y considérant r''' comme inconnue, servira à trouver immédiatement par points la caustique résultant de deux réfractions consécutives, sans qu'on soit obligé de tracer la caustique intermédiaire.

Si, en particulier, les deux surfaces séparatrices sont deux faces d'un même corps transparent, il faudra joindre à l'équation (11) la double équation

$$\frac{\text{Sin.}\theta}{\text{Sin.}\theta'}=\frac{\text{Sin.}\theta'''}{\text{Sin.}\theta''}=\frac{\lambda}{\lambda'}\;;\qquad(12)$$

on peut donc considérer le système de ces deux équations comme renfermant toute la théorie des lentilles de toute nature dont on pourra ainsi déterminer les foyers sans négliger leur épaisseur, comme on le fait communément.

Des équations (1) et (1′) on tire, en transposant et divisant,

$$\frac{ds-dr}{ds'-dr'}=\frac{\text{Sin}\,\theta}{\text{Sin.}\theta'}=\frac{\lambda}{\lambda'}\,,$$

d'où

$$\frac{ds-dr}{\lambda}=\frac{ds'-dr'}{\lambda'}\;;$$

ce qui donne, en intégrant,

$$\frac{s-r}{\lambda}-\frac{s'-r'}{\lambda'}=C\,,$$

C étant la constante arbitraire. Si l'on fait commencer ensemble les arcs s et s' et qu'on désigne par r_0 et r'_0 les rayons incidens et réfractés qui répondent à leur origine, on aura

$$-\frac{r_0}{\lambda}+\frac{r'_0}{\lambda'}=C\ ;$$

d'où, en retranchant et transposant,

$$\frac{s+r_0-r}{\lambda}=\frac{s'+r'_0-r'}{\lambda'}\ . \qquad (13)$$

Si l'on demande quelle doit être la courbe séparatrice pour que les rayons émanés d'un certain point concourent, après leur réfraction, en un autre point, il faudra poser $s=0$ et $s'=0$, au moyen de quoi l'équation (13) deviendra

$$\frac{r}{\lambda}-\frac{r'}{\lambda'}=\frac{r_0}{\lambda}-\frac{r'_0}{\lambda'}=\text{Const.} \qquad (14)$$

Telle est donc la relation entre les distances r et r' des différens points de la courbe demandée aux deux points fixes donnés ; d'où il est aisé de conclure que l'équation de cette courbe, en coordonnées rectangulaires, s'éleverait au quatrième degré. Ces sortes de courbes ont été appelées *lignes aplanétiques* par M. Quetelet qui en a fait le sujet de diverses recherches fort curieuses, soit dans sa *Correspondance*, soit dans des mémoires spéciaux.

Tout ce qui vient d'être dit s'applique immédiatement à la réflexion, en supposant simplement $\theta'=-\theta$, d'où $\text{Sin.}\theta'=-\text{Sin.}\theta$, $\text{Cos}\,\theta'=\text{Cos.}\theta$ et $\lambda'=-\lambda$; ainsi, d'abord, si des rayons incidens sont tous tangens à une même courbe, en représentant par r la longueur du rayon incident, comptés depuis cette courbe jusqu'au point d'incidence, par r' la longueur du rayon réfléchi, comptée depuis le point d'incidence jusqu'à la caustique, et enfin par R le rayon de courbure de la courbe réfléchissante, au point d'incidence, on aura (6)

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=\frac{2}{R\,\mathrm{Cos}.\theta}\ ; \qquad (15)$$

formule commode pour tracer par points la caustique par réflexion lorsqu'on donne la courbe réfléchissante et celle à laquelle les rayons incidens sont tangens. On ramenerait au surplus à ce problème celui où l'on donnerait une courbe à laquelle les rayons incidens seraient normaux.

Si l'on considère uniquement le rayon incident normal à la courbe réfléchissante, on aura (8)

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=\frac{2}{R}\ , \qquad (16)$$

ce qui détermine le foyer dans les miroirs circulaires. S'il s'agit du foyer principal ou du foyer des rayons parallèles, on aura (9)

$$r'=\frac{R}{2}\ . \qquad (17)$$

Le point rayonnant étant quelconque, si la ligne réfléchissante est droite, on aura

$$r'=-r\ ; \qquad (18)$$

enfin on parviendrait, au moyen de l'équation (15), à construire directement la caustique qui naîtrait d'un nombre quelconque de réflexions consécutives, sans être obligé de construire les caustiques intermédiaires. Quant à la ligne aplanétique par réflexion, elle sera donnée (14) par l'équation

$$r+r'=\mathrm{Const.}\ ;$$

c'est-à-dire que cette ligne sera une ellipse ou une hyperbole suivant que r et r' seront de mêmes signes ou de signes contraires, et conséquemment une parabole lorsqu'un des deux points fixes sera infiniment distant.

Les formules (6) et (15), en y supposant R constant, et en admettant que $s=0$, rentrent exactement dans celles qui ont été données par Petit, dans la *Correspondance* de M. Hachette (tom. II, pag. 353), pour le cas d'un cercle réfléchissant ou séparateur, et de rayons incidens tous émanés d'un même point; mais on voit en même temps qu'ici ces formules ont un sens beaucoup plus étendu. Il est surprenant, au surplus, que Petit n'ait pas songé à leur donner une extension aussi facile; il aurait pu considérer, en effet, que, quand des rayons incidens, tangens à une courbe quelconque, se réfléchissent ou se réfractent, à la rencontre d'une autre courbe également quelconque, l'un d'eux peut être envisagé comme émané de son point de contact avec la première de ces deux courbes, et son point d'incidence comme un des points du cercle osculateur de la seconde courbe; de sorte que les formules construites pour le cercle et pour des rayons émanés d'un même point doivent subsister encore, en remplaçant le rayon du cercle par le rayon de courbure, au point d'incidence, de la courbe dont il est le cercle osculateur, en en remplaçant la distance du point d'incidence au point rayonnant par la distance de ce point d'incidence au point de contact du rayon qui y parvient avec la courbe enveloppe de tous les rayons incidens. C'est exactement de la même manière qu'en mécanique de la théorie du mouvement dans le cercle, on passe à la théorie du mouvement le long d'une courbe quelconque (*).

(*) Les géomètres qui, les premiers, se sont occupés de la théorie des caustiques, avaient cru faussement pouvoir substituer à la courbe réfléchissante ou séparatrice sa tangente au point d'incidence; l'identité des formules de M. Lambert avec celles de Petit prouve que, du moins, il est permis de substituer à cette courbe son cercle osculateur au point d'incidence.

J. D. G.