ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

CROVA

Questions résolues. Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la pag. 182 du XIX.me volume du présent recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 21 (1830-1831), p. 301-304
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__301_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la pag. 182 du XIX.^{me} volume du présent recueil ;

Par M. Crova, professeur de mathématiques spéciales au collége de Perpignan.

THÉORÈME I. *Les milieux des cordes interceptées par une ligne du second ordre, sur des droites issues d'un même point, sont sur une autre conique qui lui est homothétique et qui passe par le point dont il s'agit.*

Démonstration. Soit pris le point donné pour origine des coordonnées auxquelles nous supposerons d'ailleurs une direction quelconque, et soit alors l'équation de la courbe proposée

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+Fy=0 \ . \qquad (1)$$

Soit alors $y=mx$ l'équation de l'une des droites dont il s'agit ; on obtiendra les coordonnées de ses points d'intersection avec la courbe, en considérant leurs équations comme celles d'un même problème déterminé, ce qui, en éliminant y entre elles donnera, pour avoir les valeurs de x qui répondent à ces intersections, l'équation du second degré,

$$(A+Bm^2+2Cm)x^2+2(D+Em)x+F=0 \ .$$

Si l'on représente par x' la valeur de x qui répond au milieu de la corde interceptée, cette valeur sera, comme l'on sait, la demi-somme des valeurs de x données par cette équation. Or, dans une équation du second degré, sans coefficient à son premier terme, le coefficient du second terme, pris en signe contraire, est égal à la somme des racines, d'où l'on voit qu'on aura

$$x'=-\frac{D+Em}{A+Bm^2+2Cm} \ ,$$

ou bien encore

$$Bx'm^2+(2Cx'+E)m+(Ax'+D)=0 \ .$$

Si, de plus, on représente par y' la valeur de y qui répond à ce milieu, on aura

$$y'=mx' \ ;$$

éliminant donc m entre ces deux équations, l'équation résultante

$$Ax'^2+By'^2+2Cx'y'+Dx'+Ey'=0 \ , \qquad (2)$$

sera celle du lieu des milieux des cordes interceptées par la courbe proposée sur toutes les droites issues du point donné. Or, cette équation est du second degré, d'où il suit que la courbe dont il s'agit est une ligne du second ordre ; cette équation est privée du terme indépendant de x et de y, d'où il suit que la courbe en question passe par l'origine, c'est-à-dire, par le point donné ; enfin les coefficiens des termes du second ordre dans l'équation (2) sont les mêmes que dans l'équation (1) ; d'où il suit que la nouvelle courbe est homothétique avec la première.

THÉORÈME II. Les milieux des cordes interceptées par une surface du second ordre, sur des droites issues d'un même point de l'espace, sont sur une autre surface du second ordre qui lui est homothétique et qui passe par le point donné.

Démonstration. Soit pris encore ici le point donné pour origine des coordonnées qui pourront d'ailleurs avoir des directions quelconques, et soit alors

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy+2Gx+2Hy+2Kz+L=0\ , \qquad (1)$$

l'équation de la surface dont il s'agit. Une quelconque des droites issues du point donné aura des équations de la forme

$$x=mz\ , \qquad y=nz\ .$$

Si, considérant ces trois équations comme celles d'un même problème déterminé, on élimine entre elles x et y, l'équation résultante en z donnera les valeurs de z qui répondent aux deux extrémités de la corde interceptée. Cette équation est

$$(Am^2+Bn^2+C+2Dn+2Em+2Fmn)z^2+2(Gm+Hn+K)z+L=0\ .$$

Si l'on représente par z' la valeur de z qui répond au milieu de cette corde, pour les mêmes raisons que ci-dessus, on aura

$$z'=-\frac{Gm+Hn+K}{Am^2+Bn^2+C+2Dn+2Em+2Fmn},$$

ou bien

$$Az'm^2+Bz'n^2+2Fz'nm+(2Ez'+G)m+(2Dz'+H)n+(Cz'+K)=0\,.$$

Si, de plus, on représente respectivement par x' et y' les valeurs de x et y qui répondent aux mêmes milieux, on aura

$$x'=mz'\,,\qquad y'=nz'\;;$$

éliminant m et n entre ces trois équations, l'équation résultante

$$Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2Dy'z'+2Ez'x'+2Fx'y'+Gx'+Hy'+Kz'=0\,,\qquad (2)$$

sera celle du lieu des milieux des cordes interceptées par la surface proposée sur toutes les droites issues du point donné ; or, cette équation est une équation du second degré, dépourvue du terme indépendant de x', y' et z', et dans laquelle les coefficiens des termes du second ordre sont les mêmes que ceux de l'équation (1) ; donc le lieu dont il s'agit est une surface du second ordre, homothétique avec la surface proposée, et passant par le point donné.